Теория определимости в контексте информационно-коммуникационных систем

Алексей Семенов

Зав. кафедрой математической логики и теории алгоритмов
МГУ им. М. В. Ломоносова

Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем»
Тверской государственный университет, 4 декабря 2021 г.

Доклад является продолжающимся предложением участвовать в исследовании проблематики определимости.
Область:

- естественная, как и теория моделей, теория доказательств, теория вычислимости;

Доклад является продолжающимся предложением участвовать в исследовании проблематики определимости.
Область:

- естественная, как и теория моделей, теория доказательств, теория вычислимости;
- предполагающая очевидные приложения в области анализа естественного языка, баз данных, ИИ;
- традиционно недооцениваемая (А. Тарский).

Доклад является продолжающимся предложением участвовать в исследовании проблематики определимости.
Область:

- естественная, как и теория моделей, теория доказательств, теория вычислимости;
- предполагающая очевидные приложения в области анализа естественного языка, баз данных, ИИ;
- традиционно недооцениваемая (А. Тарский).
- имеющая давно стоящие открытые проблемы, не поддающиеся решению десятками исследователей (Гипотеза Томаса).
- имеющая понятно формулируемые нерешенные задачи широкого спектра сложности; в частности – в области перехода от однородных структур к пополнимым вверх и далее (этот доклад).

Возможный совместный проект научно-образовательных математических центров:

- Москва (МГУ, МИАН)
- Казань
- Сочи
- Новосибирск
- Санкт-Петербург

Тверской государственный университет, как центр исследований по определимости, в том числе - в приложении к теории баз данных (М.А. Тайцлин, С.М. Дудаков)

Возможный совместный проект научно-образовательных математических центров:

- Москва (МГУ, МИАН)
- Казань
- Сочи
- Новосибирск
- Санкт-Петербург

Тверской государственный университет, как центр исследований по определимости, в том числе - в приложении к теории баз данных (М.А. Тайцлин, С.М. Дудаков)
Тематика может использоваться как элемент математического образования, начиная с уровня средней школы.

- Прецедент: «Летняя конференция Турнира городов. 2021».
- Студенты и школьники из Москвы, Казани, Петрозаводска

Международное сотрудничество:

- Французские исследователи
- Дни слабой арифметики JAF – Москва, 13–17 июня 2022 г.

Повысившаяся роль дистанционного взаимодействия.
Создание перечня открытых проблем (Zoom-Тетрадь)

Теория определимости: как определить какое-то понятие через другие?

- XVIII век: G. W. Leibniz Lingua Universalis.
  XXI век: Anna Wierzbicka – 65 базовых понятий для всех человеческих языков.
- XIX век: алгебра – логика отношений C. S. Pierce
- XX век:
  - Лингвистика N. Chomsky, J. Fodor, G. Lakoff
  - Formal concept analysis (FCA) R. Wille, T. B. Seiler
  - Реляционные базы данных
- XXI век:
  - разметка больших данных
  - онтологии ИИ
  - доверительный, объяснительный ИИ

Конец XIX века. Математика
Определение структур Математики: Геометрия и Арифметика

Italy:

Giuseppe Peano,
Alessandro Padoa,
Mario Pieri, . . .

Giuseppe Peano
1858 – 1932

Mario Pieri
1860 – 1913

Alessandro Padoa
1868 – 1937

Germany:

Moritz Pasch,
Gotlob Frege,
David Hilbert, . . .

Moritz Pasch
1843-1930

Gotlob Frege
1848-1925

David Hilbert
1862 - 1943

Цель: найти «наилучшую» систему базисных понятий для Геометрии и Арифметики.

Роль Альфреда Тарского и польской шолы в определимости и роль определимости в трудах Тарского

- Доклад Польскому матобществу 1930 г.
- Элиминация как определение семантики, Сколем.
- Ученик Тарского Mojżesz Presburger, дипломная работа с элиминацией кванторов для сложения целых.
- Неопределимость арифметической истины (1933) Гедель (1930), фон Нейман...
- Основные понятия геометрии

Мойжеш Пресбургер
Mojżesz Presburger
(1904–1943)

Американский период Тарского

- Замкнутость полуалгебраических множеств относительно проекции – Разрешимость элементарной алгебры и геометрии ок. 1938–1948 г.
- Цилиндрические алгебры = алгебры понятий (concept algebras) 1947 г.
- Самоопределимость, 1948 г. далее – Андрей Мучник
- Геометрия логики, Эрлангенская программа What are Logical Notions? Лекция в Университете Лондона, 16 мая 1966 г.

Альфред Тарский
Alfred Tarski
(1901–1983)

«Mathematicians, in general, do not like to operate with the notion of definability; their attitude towards this notion is one of distrust and reserve».

Alfred Tarski, On Definable Sets of Real Numbers, Talk to the Polish Mathematical Society, 1930; Fundamenta Mathematicae, 1931.

Альфред Тарский
Alfred Tarski
(1901–1983)

J. Addison: «The theory of definability, initiated formally by Alfred Tarski, but incorporating earlier informal work in analysis, general topology, and other fields, is an attractive, important, and in some respects central branch of logic. It cuts across most of the standard divisions of research in logic ... and increasingly becomes involved with theoretical computer science».

A seminal role leading toward unification of the theories has been played by the separation principles introduced by Nikolai Luzin in 1927.

Наши исследования начались в 1970-ых гг. с задачи, поставленной Альбертом Мучником со ссылкой на Петра Сергеевича Новикова.

Основные понятия теории определимости:
Идея: определяем отношение через другие – на той же области. Наши определения эквивалентны определениям алгебры понятий Тарского, но в качестве опеаций мы сразу берем всю логику.

- Область (универсум) U
- Язык L: Логика отношений (то, что математики иногда называют «логика предикатов первого порядка»): логические символы, равенство, кванторы по элементам универсума
- R – отношение, S – множество отношений
- R is *определимо через* S титтк R есть значение формулы в языке L, в кототорой значения имен отношений берутся из S
- замыкание S – всё определимое
- замкнутые множества – *пространства определимости* (REDUCTS)
- *решетка определимости* структуры образована всеми подпространствами ее пространства определимости с естественными операциями inf и sup, отвечающими порядку

Основные понятия теории определимости:
Идея: определяем отношение через другие – на той же области. Наши определения эквивалентны определениям алгебры понятий Тарского, но в качестве опеаций мы сразу берем всю логику.

- Область (универсум) U
- Язык L: Логика отношений (то, что математики иногда называют «логика предикатов первого порядка»): логические символы, равенство, кванторы по элементам универсума
- R – отношение, S – множество отношений
- R is *определимо через* S титтк R есть значение формулы в языке L, в кототорой значения имен отношений берутся из S
- замыкание S – всё определимое
- замкнутые множества – *пространства определимости* (REDUCTS)
- *решетка определимости* структуры образована всеми подпространствами ее пространства определимости с естественными операциями inf и sup, отвечающими порядку

Определения инвариантны по отношению к выбору исходной системы отношений структуры – 'бескоординатны'.

Решетки определимости

Начальный пример

Edward Huntington (1916) описал подпространства произвольного линейного порядка:

$(x_1 < x_2)$ – сам порядок;

$(x_1 < x_2 < x_3) \vee (x_3 < x_2 < x_1),$ – «between»;

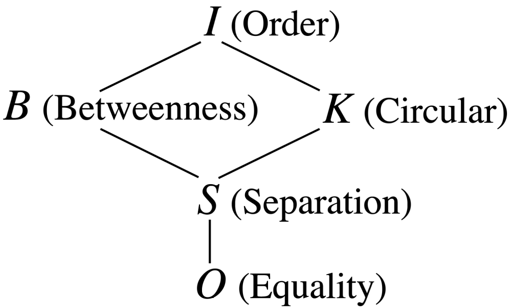
$(x_1 < x_2 < x_3) \vee (x_2 < x_3 < x_1) \vee (x_3 < x_1 < x_2)$ – «cycle» ;

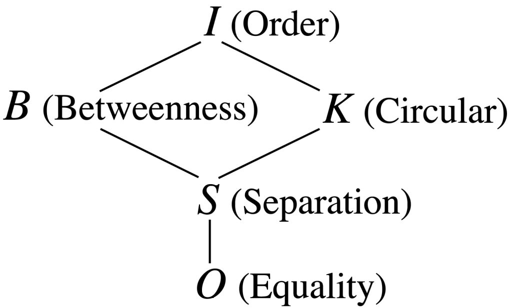
– «separation» («link»): интервалы с концами x_1, x_3 и концами x_2, x_4 пересекаются, но не вложены один в другой. Эквивалентно сонаправленности (эквиполлентности)

– равенство.

Claude Frasnay (1965) доказал, что эти пространства исчерпывают решетку порядка рациональных чисел $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$

Peter Cameron, Graham Higman, Wilfrid Hodges – Alistair Lachlan – Saharon Shelah, Markus Junker – Martin Ziegler, Ан. Мучник – Семенов предложили различные доказательства.

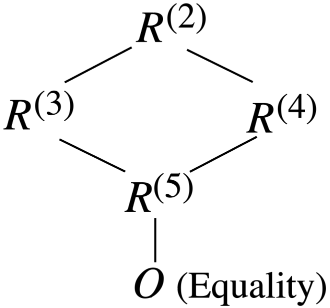

I (Order)
B (Betweenness)
K (Circular)
S (Separation)
O (Equality)



Загадка: Добавим в $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ одну константу – 0. Как вы думаете, сколько будет пространств в решетке?

$\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ – однородная структура = каждый (частичный) изоморфизм конечных (под)структур продолжается до автоморфизма всей структуры.

Еще одна замечательная однородная структура – случайный граф Thomas 1991 для $k = 2, 3, 4, 5$, $R^{(k)}$ = все элементы $x_1, ..., x_k$ различны и количество ребер между ними – нечетно. Решетка:



Как доказывать НЕ-определимость = невозможность определить?

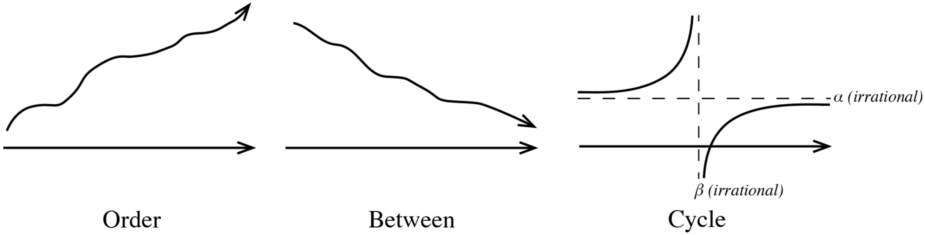
- Невозможность в математике: Галуа – Абель и т. д.
- Трансформации

Пространство определимости $S \mapsto$ *Группа его автоморфизмов* Γ_S = Группа Галуа S
S – *пространство инвариантов* для своей группы
Соответствие Галуа – (анти)-гомоморфизм между решеткой определимости структуры и решеткой замкнутых надгрупп группы автоморфизмов структуры.
Метод автоморфизмов восходит к Падоа.

Метод автоморфизмов

$\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}} \Rightarrow R \notin [S]$

Графики преобразований



Графики для других порядков аналогичны.

Доказательство, что других надгрупп нет, можно провести, последовательно рассматривая k-транзитивные и не $k+1$-транзитивные группы преобразований для $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ и их орбиты.

Что будет, если добавить константу

- Junker – Ziegler (2008) рациональные числа с сечением:
- rational (0) – 116.
- irrational – 53.

Гипотеза Томаса

Каждая счетная однородная конечнопорожденная структура имеет конечную решетку определимости.

Каждая структура с конечной решеткой определимости – однородна.
Также – открытая проблема.

ω-категоричность = изоморфизм всех элементарно эквивалентных

Теорема изоморфизма

ω-категоричный случай [Ryll-Nardzewski, Engeler and Svenonius, конец 1950-ых]
Решетка определимости всякой ω-категоричной структуры (анти)-изоморфна решетке замкнутых надгрупп группы автоморфизмов структуры.

S – пространство определимости, R – отношение

Метод автоморфизмов

$\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}} \iff R \notin [S]$

Что просходит за пределами ω-категоричности?

Теорема Свенониуса

Для любой счетной структуры, элемента S ее решетки определимости и отношения $R \notin S$ существует элементарное расширение структуры, в котором $\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}}$

В 'Геометрии логики' мы добавляем 'мнимые' элементы к структуре

"Observer upon reading the papers of Tarski, might have wondered about the existence of general theorems which would explain elementary definability as the above theorems [explain] the basic properties of elementary logical consequence.

With Klein's Erlanger Programm, it became apparent that automorphism groups are most useful means of studying mathematical theories.

In 1959 Svenonius published a result on elementary definability ... logicians seem slow in recognizing Svenonius' theorem as a basic tool in the theory of definability."

Buchi J. Richard, Danhof Kenneth J. 1973, «Definibility in normal theories»

Таким образом, Ларс Свенониус доказал «Теорему полноты» для Геометрии Логики.

Структура *полна вверх* = все ее элементарные расширения ей изоморфны.

Теорема полноты для пополнимых вверх структур

Если у структуры существует полное вверх элементарное расширение, то ее решетка определимости (анти)-изоморфна решетке замкнутых надгрупп ее группы автоморфизмов.

S – полное вверх пространство, R – отношение

Метод автоморфизмов

$\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}} \iff R \notin [S]$

Естественные числовые структуры/пространства:

- рациональный порядок $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ – однородная структура, элементарно эквивалентная $\langle \mathbb{R}; < \rangle$ (5-и элементная решетка).

  Пополнимые вверх структуры:
- $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$ – счетная решетка
- $\langle \mathbb{Q}; + \rangle$ эквивалентная $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ – континуальная решетка

$\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$

Theorem 1

Положим:

$A_{0,n}(x_1, x_2) \leftrightharpoons |x_1 - x_2| = n,$
$A_{1,n}(x_1, x_2, x_3, x_4) \leftrightharpoons x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = n \vee x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = -n,$
$A_{2,n}(x_1, x_2) \leftrightharpoons x_1 - x_2 = n.$

Тогда,
каждый элемент $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$ порожден $A_{i,n}$ для некоторых $i \leqslant 2$ и натурального n;

для каждых $0 < i \leqslant 2$ и натурального n, m
$A_{i,n} \succ A_{i-1,n}$ *,* $A_{i,n} \succ A_{i,m} \iff$ *n делит m;*

$[A_{i,d}] \cup [A_{j,k}] = [A_{m,n}]$, *где* $m = \max\{i, j\}, n = GCD(d, k)$;

$[A_{i,d}] \cap [A_{j,k}] = [A_{m,n}]$, *где* $m = \min\{i, j\}, n = LCM(d, k)$.

Все $A_{i,n}$ различны.

Как выглядит пополнение вверх для $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$?

- Счетное семейство разрозненных $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$.

Возможные варианты и обобщения:

Счетный универсум, конечная сигнатура.
Построение пополнений:

- $\langle \mathbb{N}; +1 \rangle$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ – два коммутирующих следования
- Несколько свободных следований.
- Бескорневое двоичное дерево. Например: одна ось – $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$, со сдвигом 0. В каждой точке добавляем ребро – сдвиг 1, из которого растет корневое двоичное. Из каждой точки выходит 0 и 1, в каждую точку входит 0 или 1.
- Можно стереть пометки и направления ребер

Общая идея:

Условие однородности: финитно-глобальное –

- изоморфизм конечных подструктур продолжается до автоморфизма структуры
- конечная подструктура может содержать далекие элементы.

Локальная однородность:
двухместные отношения в сигнатуре и т. д.

- изоморфизм конечных связных структур (графов) продолжается до автоморфизма структуры.

Следующие шаги

Порядок целых чисел

- гомоморфизм отношений Хантингтона
- аналоги серий для целых чисел
- пополнение вверх $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

Следования и порядки целых и натуральных

- Периодические и почти периодические одноместные отношения
- Несколько следований, деревья

Перспектива (отдаленная?)

Сложение целых (натуральных) чисел
– Задача, поставленная Ал. Мучником Семенову ок. 1970 со ссылкой на Новикова (одновременно с обобщением Кобхэма)

- Пополнимость вверх
- Поиск новых отношений/"понятно устроенных"расширений

Элиминация кванторов

Конечная реляционная сигнатура

- Однородные структуры – допускают элиминацию квантров.
- Арифметика Пресбургера – не допускает (даже если использовать функциональные символы).
- Разрешение бесконечной сигнатуры делает задачу неопределенной.

Экзистенциальная элиминация кванторов

Если разрешить только кванторы существования, получаем:

- Алгоритмическую разрешимость.
- Возможность заменить функциональные имена именами отношений.
- Арифметика Пресбургера – экзистенциальна. Добавление быстро растущих функций не выводит за пределы экзистенциальности (Сем 1979, 1983).
- Конечно-автоматная определимость (во многих случаях) – экзистенциальна (существует допускающий ход автомата)
- CSP Constraint satisfaction problem? Обобщенная выполнимость – вложимость структуры описывается экзистенциально.

В рассматривемых структурах и их редуктах экзистенциально элиминируются кванторы, разрешимы проблемы принадлежности, CSP и т. д.

Кванторная высота

Логическая сложность – *(кванторная) высота* пространства – минимальное количество перемен кванторов, позволяющая получить все пространство, начиная с конечного числа отношений.

Проблема пробела в кванторной высоте.

- Почему естественно возникающие структуры имеют малую (обычно, 0, 1), или бесконечную высоту?
- Естественные неразрешимые случаи – имеют бесконечную кванторную высоту.
- Можно построить неразрешимые и разрешимые случаи любой кванторной высоты.

Определимость определимости. Само-определимость Мучника

Tarski: self-definability

Андрей Мучник:
Пространство определимости S называется *самоопределимым* титтк для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует утверждение F_n содержащее дополнительный символ P_n n-местного отношения, эквивалентное тому, что P_n принадлежит S.

Теорема Мучника

Пространство $\langle \mathbb{N}; + \rangle$ самоопределимо.

Андрей Мучник доказал свою теорему в успешной попытке упростить доказательство Семенова теоремы Кобхэма – Семенова. Его доказательство имело резонанс и теорему сегодня стоит называть Теоремой Кобхема – Семенова – Мучника.
Теорема, естественно, позволяет проверять определимость, если структура, в которой мы записываем и в которой есть сложение – разрешима (например, автоматна). Очевидно, если множество n-местного отношений конечно для каждого $n = 1, 2, \ldots$, то структура самоопределима.
Не удается найти другие. Естественные кандидаты:

- $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$
- $\langle \mathbb{Q}; + \rangle$

Андрей Мучник
(1958–2007)

(Zoom) (Пред-)Тетрадь нерешенных проблем теории определимости
(аналог Коуровской тетради)

Предполагается создать первое издание на:
the Problem session of JAF (Journées sur les Arithmétiques Faibles = Weak Arithmetics Days), https://www.lacl.fr/jaf/ in Moscow, 2022

Пишите: alsemno@ya.ru