Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем»
Тверской государственный университет, 3-8 декабря 2021 года

Тотальные и кототальные степени перечислимости множеств и функций

Б.Я. Солон

Ивановский государственный университет, г. Иваново

Мы будем использовать понятия и терминологию, которые приняты в монографии Х. Роджерса «Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость». Пусть $\omega = \{0,1,2,\dots\}$ – множество натуральных чисел.

Основные обозначения:

$$A, B, C, \dots \subseteq \omega$$

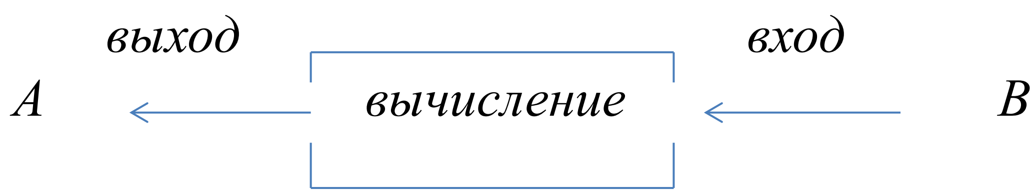
$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi \; - \text{частичные функции}$$

$$f, g, h, \dots - \text{тотальные функции}$$

$\tau(\alpha) = \{\langle x, \alpha(x)\rangle : \alpha(x)\downarrow\} -$ *график* функции α

$\{\Phi_z : z \in \omega\} -$ эффективное перечисление всех e-операторов

Будем использовать понятие *е-оператора и е-сводимости* в интуитивном смысле. Имеем вычислительное устройство с входом и выходом (оператор перечисления или е-оператор), работа которого происходит по заданной программе и время от времени появляется некоторое число на выходе. В программе устройства предусмотрено, что время от времени требуется ‘входное’ число. Если затребован вход, то может быть подано любое натуральное число или не подано никакого числа. Пусть на вход подаются элементы множества B, а на выходе появляются элементы множества A. Порядок, в котором появляются элементы множества A, может меняться при изменении порядка подачи элементов B на вход. Будем допускать также повторяемость элементов в пересчете множества B и в пересчете множества A.



Такая интерпретация позволяет сказать, что множество A *сводимо по перечислимости* или *e-сводимо* к B (обозначение: $A \leq_e B$), если существует описанное выше вычислительное устройство, которое получая в качестве входов элементы B в каком бы то ни было порядке на выходе перечисляется множество A в некотором порядке.

По определению, множество A *е-сводится к множеству* B (обозначение: $A \leq_e B$), если $\exists z[A = \Phi_z(\mathrm{B})]$. Как обычно, через

$$deg_e(A) = \{X: X \leq_e A \wedge A \leq_e X\}$$

обозначим *е-степень* множества A. Множество е-степеней с индуцированным частичным порядком

$$deg_e(A) \leq deg_e(B) \leftrightarrow A \leq_e B$$

обозначим через D_e. Отношение е-сводимости $\leq_e$ на множествах можно естественным образом перенести на функции:

$$\alpha \leq_e \beta \leftrightarrow \tau(\alpha) \leq_e \tau(\beta).$$

Аналогично определяется е-степень функции α, которую будем обозначать $deg_e(\alpha) = \{\gamma: \gamma \leq_e \alpha \wedge \alpha \leq_e \gamma\}$ и называвать *частичной степенью* функции α. Частично упорядоченное множество частичных степеней обозначим через L_e.

Для произвольного множества A е-степени $deg_e(A)$ и $deg_e(\bar{A})$ не обязаны быть сравнимы. Чтобы обеспечить их сравнимость, можно выделить два класса е-степеней. Первый был введен одновременно с самими степенями перечисления – это класс тотальных е-степеней.

Определение 1. е-степень $deg_e(A)$ называется *тотальной*, если $\tau(\varphi) \in deg_e(A)$ для некоторой тотальной функции φ.

Легко доказать, что $deg_e(A)$ тотальна тогда и только тогда, когда $\bar{B} \leq_e B$ для некоторого множества $B \in deg_e(A)$. Так будет, если $B = \tau(\varphi)$ для некоторой тотальной функции φ. Именно поэтому можно употребить термин ‘*тотальное множество* A’ в тех случаях, когда $\bar{A} \leq_e A$. Итак, если A – тотальное множество, то

$$deg_e(\bar{A}) \leq deg_e(A).$$

Второй класс связан с перестановкой множеств A и $\bar{A}$ в этом отношении e-сводимости. Первыми выделили множества A со свойством $A \leq_e \bar{A}$ К. Миллер и М. Соскова в 2010 году. Для этих множеств они ввели термин ‘*кототальные множества*’. В 2019 году была опубликована большая статья группы математиков из University of Wisconsin, Madison, посвященная изучению кототальных e-степеней [On cototality and the skip operator in the enumeration degrees. /Uri Andrews, Hristo A. Ganchev, Ruitger Kuyper et al. // Trans. Amer. Math. Soc. 2019. Vol. 372. P. 1631–1670].

Определение 2. e-степень $deg_e(A)$ называется *кототальной*, если $B \leq_e \bar{B}$ для некоторого множества $B \in deg_e(A)$.

Впервые термин ‘ко-тотальное множество’ (именно в таком написании через дефис), использовался в тезисах А.В. Панкратова [Andrey V. Pankratov. Some properties of e-degrees of cototal sets (Russian). In International conference “Logic and applications”, Proceedings, Novosibirsk, 2000.] (в то время – моего аспиранта) для множеств A, таких, что $\bar{A} = \tau(\varphi)$ для некоторой тотальной функции φ. Ясно, что в этом случае е-степень $deg_e(A)$ кототальна в смысле определения 2. Им был анонсирован результат, утверждающий, что существует кототальная $\sum_2^0 -$ е-степень, которая образует минимальную пару с каждым неполной $\prod_1^0 -$е-степенью. Однако, как выяснилось позже, кототальность в этом результате не при чем, так как было доказано, что любая $\sum_2^0 -$е-степень граф-кототальна.

В статьях автора [Boris Ya. Solon. Total and co-total enumeration degrees (Russian). Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 9:60-68, 2005 и Boris Ya. Solon. Co-total enumeration degrees. In Proceedings of the Second Conference on Computability in Europe: Logical Approaches to Computational Barriers, CiE'06, pages 538-545, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer-Verlag] изучались кототальные e-степени двух типов: e-степени $deg_e(A)$ первого типа, когда $\bar{A} = \tau(\varphi)$ для некоторой тотальной функции φ, и e-степени $deg_e(A)$ второго типа, когда множество A такое, что $\bar{A}$ из тотальной e-степени.

В статье [Uri Andrews, Hristo A. Ganchev, Ruitger Kuyper et al.] было выделено три уровня кототальности множеств и e-степеней. Авторы данной статьи цитировали мои результаты и результаты А.В. Панкратова, указывая на то, что классы e-степеней первого и второго типа различны. Приведем определения трех видов кототальных множеств и e-степеней.

Определение 3. Множество A называется *кототальным*, если $A \leq_e \bar{A}$. Множество A называется *граф-кототальным*, если $A = \overline{\tau(f)}$. Множество A называется *слабо кототальным*, если $\bar{A} \in deg_e(\tau(f))$.

e-степень $deg_e(A)$ называется *кототальной* (*граф-кототальной*, *слабо кототальной*), если множество A кототально (граф-кототально, слабо кототально соответственно).

Определение 4. e-степень $\boldsymbol{a}$ называется *квазиминимальной*, если она ненулевая и единственная тотальная степень ниже $\boldsymbol{a}$ равна $\mathbf{0} = deg_e(\emptyset)$.

В частности, квазиминимальные e-степени не являются тотальными.

Определение 5. Пусть $\boldsymbol{b}$ тотальная e-степень, e-степень $\boldsymbol{a}$ называется *квазиминимальной над* $\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$ и единственная тотальная степень ниже $\boldsymbol{a}$ равна $\boldsymbol{b}$.

Кототальность тесно связана оператором *скип*, введенным впервые также в статье [Uri Andrews, Hristo A. Ganchev, Ruitger Kuyper et al.]. Пусть $\{\Phi_z\}_{z\in\omega}$ - эффективное перечисление всех е-операторов и пусть $H(A) = \{\langle x, z\rangle : x \in \Phi_z(A)\}$. Иногда множество $H(A)$ называют *е-цилиндрификацией* множества A и обозначают A^e. Заметим, что $H(A) \equiv_e A$.

В цитируемой статье оператор *скип множества* A определен так: $A^\diamond = \overline{H(A)}$. Легко видеть, что скип инвариантен относительно е-сводимости, т.е. $A \leq_e B \Rightarrow A^\diamond \leq_e B^\diamond$, поэтому он индуцирует оператор на е-степенях. Обозначим через $\boldsymbol{a}^\diamond$ *скип е-степени* $\boldsymbol{a}$. Заметим, что дополнения элементов $deg_e(A)$ е-сводятся к множеству $A^\diamond$. Другими словами, $deg_e(A^\diamond)$ – максимальная возможная степень дополнений множеств из $deg_e(A)$.

Предложение 1. Множество A имеет кототальную e-степень т. и т.т., когда $A \leq_e A^\diamond$

Понятие е-скачка появилось значительно раньше. В 1976 году М.Г. Розинас в недоступной для иностранцев статье «Операция скачка для некоторых видов сводимостей», ВИНИТИ Деп. 3185-76 определил е-скачок множества A так: $J_e(A) = (A^e \oplus \overline{A^e})^e$. В 1984 году независимо от М.Г. Розинаса определение e-скачка было дано Купером:

$$J_e(A) = A^e \oplus \overline{A^e} \equiv_e A \oplus A^\diamond.$$

Будем также использовать A' вместо $J_e(A)$. Таким образом, A имеет кототальную е-степень тогда и только тогда, когда $J_e(A) \equiv_e A^\diamond$. Можно показать, что е-скачок инвариантен относительно е-сводимости, т.е. $A \leq_e B \Rightarrow A' \leq_e B'$, поэтому он индуцирует оператор е-скачка на е-степенях; мы будем использовать обозначение $\boldsymbol{a}'$ для е-скачка е-степени $\boldsymbol{a}$.

Приведем ряд теорем о граф-тотальных е-степенях. Эти результаты являются уточнением соответствующих теорем из моих статей 2005 г. в терминах граф-кототальности е-степеней.

1. Boris Ya. Solon. Total and co-total enumeration degrees (Russian). Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 9:60-68, 2005
2. Boris Ya. Solon. Co-total enumeration degrees. In Proceedings of the Second Conference on Computability in Europe: Logical Approaches to Computational Barriers, CiE'06, pages 538-545, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer-Verlag

Теорема 1. Любая тотальная e-степень $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0}'$ содержит тотальную функцию f, такую, что $deg_e(\overline{\tau(f)})$ – квазиминимальная граф-кототальная e-степень.

Теорема 2. Для каждой тотальной e-степени $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}'_{\boldsymbol{e}}$ существует граф-кототальная квазиминимальная e-степень $\boldsymbol{a}$ такая, что $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}$.

Замечание 1. Эта теорема усиливает результат К. Макэвоя [Kevin McEvoy. Jumps of quasiminimal enumeration degrees. J. Symbolic Logic, 50(3):839–848, 1985.], который доказал, что квазиминимальные e-степени имеют все возможные e-скачки.

Теорема 3. Для каждой тотальной e-степени $\boldsymbol{b}$ существует граф-кототальная e-степень $\boldsymbol{a}$, которая квазиминимальна над $\boldsymbol{b}$.

Замечание 2. Эта теорема обобщает результат Л. Гаттериджа [Lance Gutteridge. Some results on enumeration reducibility. Ph.D. Dissertation, Simon Fraser University, 1971] о существовании квазиминимальных e-степеней**.**

Для доказательства данных теорем используется интервальная конструкции. Рассмотрим схематично доказательство Теоремы 3.

Пусть $\boldsymbol{b}$ – произвольная тотальная е-степень и $B \in \boldsymbol{b}$ такое, что $B \equiv_e c_B$. Построим по шагам тотальную функцию f, удовлетворяющую требованию

$$(BQ)\colon (\forall s)\left[\overline{\tau(f)} \neq \Phi_s(B) \wedge (\forall g \in TF)\left[\Phi_s\left(\overline{\tau(f)}\right) = \tau(g) \to \tau(g) <_e B\right]\right]$$

Через f_t обозначим подфункцию функции f, построенную к концу шага t, имеющую вид $c_B \oplus \sigma_t$, где σ_t – некоторый конечный начальный сегмент, выбранный на шаге t. Пусть $l_t = 1 + max\{x : \sigma_t(x) \downarrow\}$. Таким образом, искомая функция имеет вид:

$$f = \bigcup_{t \in \omega} f_t = c_B \oplus \bigcup_{t \in \omega} \sigma_t = c_B \oplus \alpha$$

Весьма интересные результаты получаются, если рассматривать е-степени, состоящие только из графиков функций. Такие е-степени были названы Дж. Кейсом в диссертации [1969] *частичными степенями*. Приведем необходимые определения.

Пусть PF – множество всех функций, любое однозначное отображение $\Psi\colon PF' \to PF$, где $PF' \subseteq PF$, будем называть *функциональным* оператором.

Определение 6. Функциональный оператор Ψ называется *частично вычислимым,* если он определяется некоторым e-оператором Φ_z, т.е. он определен на некотором множестве $PF' \subseteq PF$ и для любой функции $\alpha \in PF'$ имеет место равенство

$$\Psi(\alpha) = \tau^{-1}\Phi_z(\tau(\alpha)).$$

В этом случае будем считать, что частично вычислимый оператор Ψ имеет тот же номер, что и Φ_z, т.е. $\Psi = \Psi_z$.

Легко доказать, что $\alpha \leq_e \beta \leftrightarrow \exists z[\alpha = \Psi_z(\beta)]$ для любых $\alpha, \beta \in PF$.

Определение 7. Частично вычислимый оператор Ψ называется *вычислимым,* если он определен на всем множестве PF.

Определим сводимость на множестве PF с помощью вычислимых функциональных операторов:

$$\alpha \leq_r \beta \leftrightarrow \alpha = \Psi(\beta)$$

для некоторого вычислимого оператора Ψ. Обычным образом определяется r-степень и частичное упорядочение r-степеней, индуцированное отношением $\leq_r$. Обозначим через L_r частично упорядоченное множество r-степеней. Известно, что L_e и L_r являются верхними полурешетками, не решетками.

Легко понять, что $\alpha \leq_r \beta \rightarrow \alpha \leq_e \beta$ для любых $\alpha, \beta \in PF$. Отсюда следует, что любая частичная степень состоит из некоторой совокупности r-степеней. Обозначим через $deg_r(\alpha)$ r-степень функции $\alpha \in PF$ и через $D_e^r(\alpha)$ частично упорядоченное множество r-степеней внутри частичной степени $deg_e(\alpha)$.

Теорема 4 [Rogers H.,Jr. Theory of Recursive Functions and Effective Computability. 1967. Graw-Hill. New York**].** Существует такая вычислимая функция g, что функциональный оператор $\Psi_{g(x)}$ является вычислимым для всех $x \in \omega$ и

$$\forall f[\exists \beta[\Psi_x(f) = \beta] \to \Psi_{g(x)}(f) = \Psi_x(f)].$$

Из теоремы 4 следует, что для любой $\alpha \in PF$ и любой тотальной функции f выполнено $\alpha \leq_e f \to \alpha \leq_r f$.

Следствие 1. Для любой тотальной частичной степени $deg_e(f)$ частично упорядоченное множество $D_e^r(f)$ имеет наибольший элемент.

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что все тотальные функции из частичной степени $deg_e(f)$ принадлежат одной r-степени $deg_r(f)$. Именно она и является наибольшим элементом в $D_e^r(f)$.

Следующее два определения впервые были введены автором в 2020 году [Вестник ИвГУ]. Пусть $\psi \in PF$ – данная частичная функция, обозначим через

$$\psi^{\sigma}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin dom\psi \\ \uparrow, & x \in dom\psi \end{cases}.$$

Определение 8. Функция ψ называется *слабо тотальной*, если $\psi^{\sigma} \leq_e \psi$.

Обозначим через *WTF* множество всех слабо тотальных функций и через D_{WTF} множество частичных степеней, содержащих хотя бы одну слабо тотальную функцию.

Следующее предложение дает простейшие свойства слабо тотальных функций

Предложение 2.

$(\boldsymbol{i})$ $\forall\psi[\psi \in TF \to \psi \in WTF]$;

$(\boldsymbol{ii})$ $\forall\psi[(\overline{dom\psi} - \text{в. п.}) \to \psi \in WTF]$;

$(\boldsymbol{iii})$ $\forall\psi[\psi \in WTF \to \psi \equiv_e c_{\tau(\psi)}]$;

$(\boldsymbol{iv})$ $D_{TF} = D_{WTF}$

Из утверждения (iv) следует, что нет нетотальных частичных степеней, которые содержали бы почти тотальные функции. Однако, как показывает, в частности, следующая теорема, существуют почти тотальные функции, которые не являются тотальными.

Теорема 5. Для любой тотальной e-степени $deg_e(f)$ частично упорядоченное множество $D_r^e(f)$ имеет наименьший элемент. Наименьшим элементом является r-степень $deg_r(\beta)$, состоящая в точности из всех слабо тотальных функций, принадлежащих частичной степени $deg_e(f)$.

Введем в рассмотрение множество $K_\psi = \{\langle z, x\rangle : x \in \Phi_z(\psi)\}$. Легко проверить, что $\tau(\psi) \equiv_e K_\psi$ для любой частичной функции ψ. Перенесем определение оператора скип с множеств на функции.

Определение 9. Для произвольной функции ψ результатом применения операции скип является функция $\psi^\diamond = \chi_{\overline{K_\psi}}$, где $\chi_A(x)$ – частичная характеристическая функция множества A.

Очевидно, что оператор скип инвариантен относительно e-сводимости функций, т.е. $\alpha \leq_e \beta \Rightarrow \alpha^\diamond \leq_e \beta^\diamond$, поэтому он индуцирует оператор на частичных степенях. Обозначим через $(deg_e\alpha)^\diamond$ *скип e-степени* $deg_e\alpha$.

Определение 10. Функция ψ называется *кототальной*, если $\psi \leq_e \psi^\sigma$.

Обозначим через CTF множество всех кототальных функций и через D_{CTF} множество частичных степеней, содержащих хотя бы одну кототальную функцию.

Определение 11. Функция ψ называется *слабо кототальной*, если $\psi^\sigma \equiv_e g$ для некоторой тотальной функции g.

Обозначим через $WCTF$ множество всех слабо кототальных функций и через D_{WCTF} множество частичных степеней, содержащих хотя бы одну слабо кототальную функцию.

Предложение 3.

(i) $deg_{\boldsymbol{e}}(\psi) \in D_{CTF} \leftrightarrow \psi \leq_e \psi^{\diamond}$;

(ii) $\forall\psi[\psi \in CTF \to \psi \in WCTF]$;

(iii) *существуют слабо кототальные, не кототальные функции*;

(iv) $(\forall\psi \in CTF)(\forall\varphi)[\varphi \leq_e \psi \to \varphi^{\sigma} \leq_e \psi^{\diamond}]$.

Из предложения 3 следует, что частичная степень $deg_{\boldsymbol{e}}(\psi^{\diamond})$ является максимальной из возможных кототальных дополнений элементов из $deg_{\boldsymbol{e}}(\psi)$.

Определение скачка частичной степени можно выразить с помощью оператора скип.

Определение 12. Для произвольной функции ψ результатом применения операции скачка является функция $\psi^{je} = \chi_{K_{\psi}\oplus}\chi_{\overline{K_{\psi}}}$.

Очевидно, что оператор скачка инвариантен относительно e-сводимости функций, т.е. $\alpha \leq_e \beta \Rightarrow \alpha^{je} \leq_e \beta^{je}$, поэтому он индуцирует оператор на частичных степенях. Обозначим через $(deg_e\alpha)'$ *скачок e-степени* $deg_e\alpha$. Пусть **0** – частичная степень, состоящая из всех частично вычислимых функций, тогда $\mathbf{0}'$ скачок степени **0**. Известно, что $\chi_{\bar{K}} \equiv_e \emptyset'$.

Теорема 6. Любая ненулевая тотальная частичная степень содержит кототальную функцию ψ, такую, что $deg_e\psi$ - квазиминимальная частичная степень.

В последнее время было опубликовано большое количество результатов, содержащих примеры кототальных множеств и e-степеней. Отмечу результат Джеанделя [Emmanuel Jeandel. Enumeration in closure spaces with applications to algebra. CoRR, abs/1505.07578, 2015] о том, что множество неидентичных слов в конечно порожденной простой группе кототально. Кроме того, недавняя статья Маккарти [Cototal enumeration degrees and their applications to effective mathematics] содержит ряд интересных результатов о характеризации спектров Тьюринговых степеней: они являются конусами e-степеней кототальных множеств.

Спасибо!
Мои контакты:
bysolon@gmail.com