ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Денис Константинович Пономарев
к.ф.-м.н., с.н.с.

Институт систем информатики СО РАН
Международный математический центр
в новосибирском Академгородке
Лаборатория алгоритмики НГУ

АКСИОМАТИКА ВОКРУГ НАС

Выбираем имена для тех или иных сущностей
Описываем взаимосвязи между ними

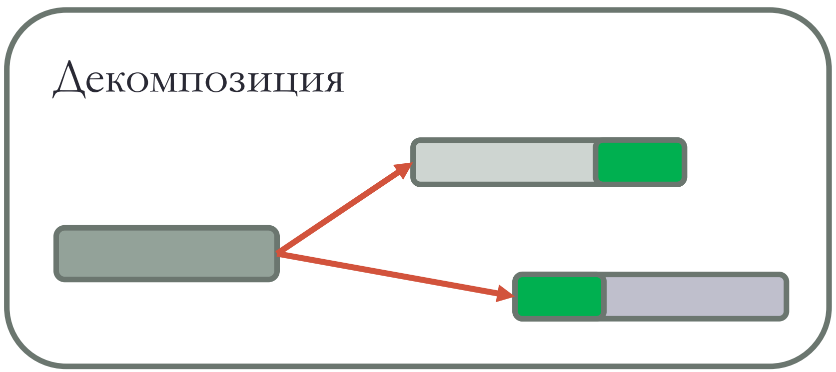
Гос. классификаторы (например, ОКВЭД и др.)
Классификация элем. частиц в физике
Таксономии в биологии, медицине
….
Словари, Тезаурусы, Онтологии

$$\textit{Энзим} \sqsubseteq \textit{Протеин} \sqcap \exists \textit{катализирует}.\textit{Реакция}$$
$$\textit{Катализатор} \equiv \exists \textit{катализирует}.\textit{Процесс}$$
$$\textit{Реакция} \sqsubseteq \textit{Процесс} \sqcap \exists \textit{производит}.\textit{Вещество}$$

АКСИОМАТИКА ВОКРУГ НАС

Выбираем имена для тех или иных сущностей
Описываем взаимосвязи между ними

Гос. классификаторы (например, ОКВЭД и др.)
Классификация элем. частиц в физике
Таксономии в биологии, медицине
….
Словари, Тезаурусы, Онтологии



$$\textbf{Энзим} \sqsubseteq \textbf{Протеин} \sqcap \exists \textbf{катализирует}.\textbf{Реакция}$$

$$\textbf{Катализатор} \equiv \exists \textbf{катализирует}.\textbf{Процесс}$$

$$\textbf{Реакция} \sqsubseteq \textbf{Процесс} \sqcap \exists \textbf{производит}.\textbf{Вещество}$$

ПОНЯТИЕ РАЗЛОЖИМОЙ ТЕОРИИ

Теория упорядоченных графов

$R, \ \leq$

$||$

R | $\leq$

Теория графов Теория лин. порядка

Арифметика Пеано

0, *, +, S

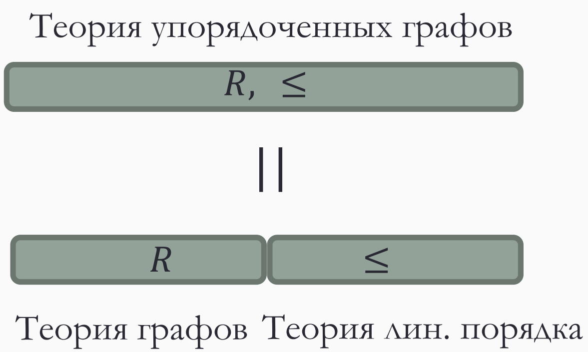
Π Π

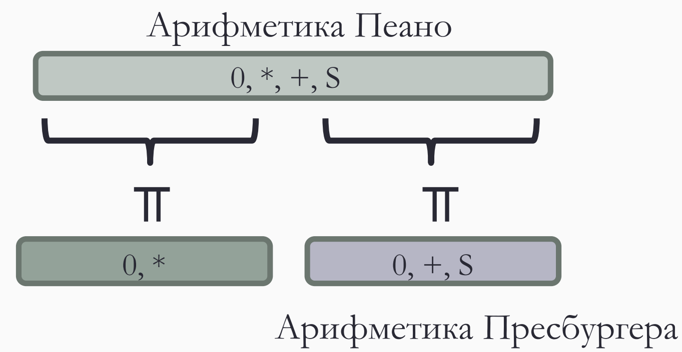
0, * | 0, +, S

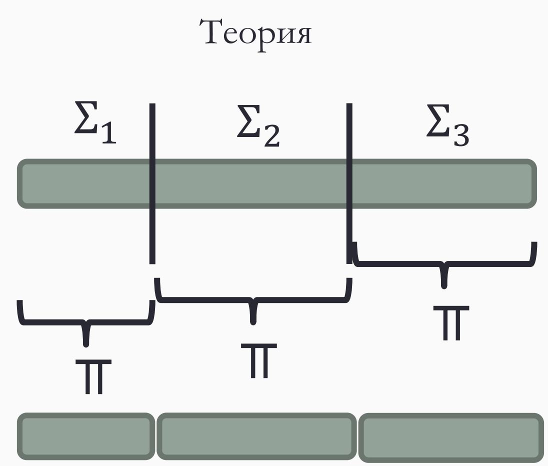
Арифметика Пресбургера

$0, * \ \cup \ 0, +, S \ \neq \ 0, *, +, S$

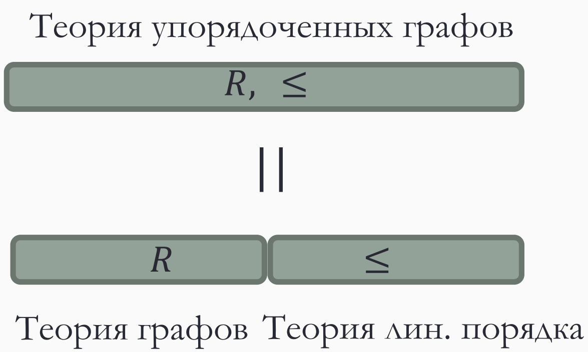
ПОНЯТИЕ РАЗЛОЖИМОЙ ТЕОРИИ

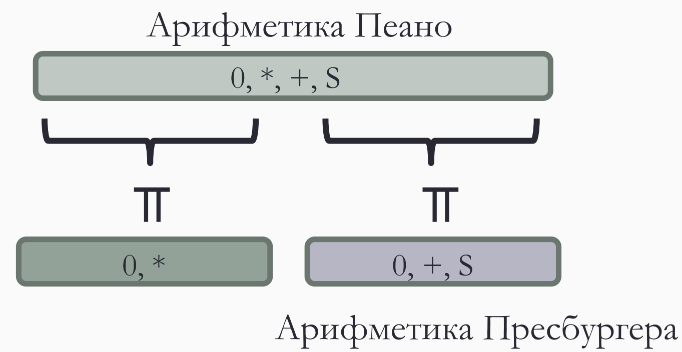




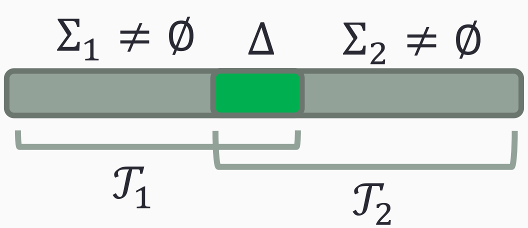


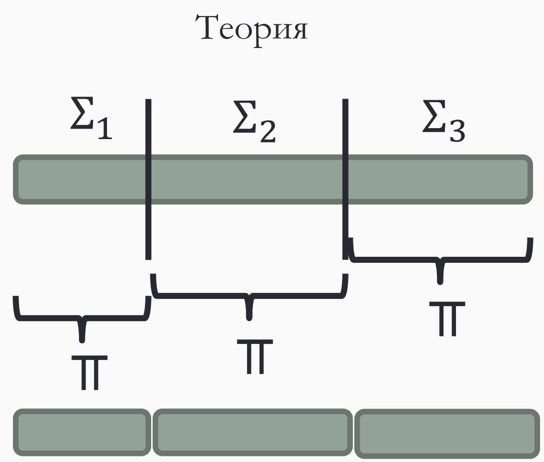
ПОНЯТИЕ РАЗЛОЖИМОЙ ТЕОРИИ

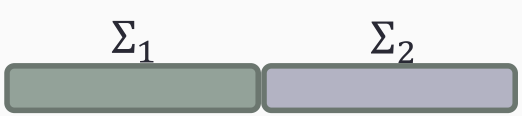




Теория Δ-разложима
(относительно своей подсигнатуры Δ),
если она эквивалентна $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ таких, что:







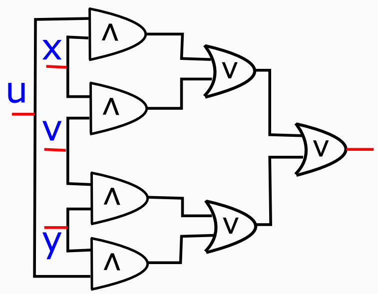
$\emptyset$-разложимая теория

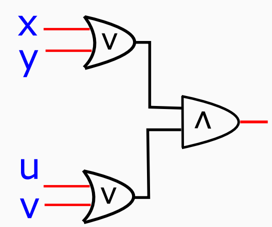
СМЫСЛ РАЗЛОЖИМОСТИ В РАЗНЫХ ЯЗЫКАХ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ТЕОРИЙ

$$\Delta = \{Person\}$$

$$\begin{array}{l} Mother \sqsubseteq \exists hasChild.(Person \sqcap (Female \sqcup Male)) \\ Person \sqsubseteq (Female \sqcup Male) \end{array} \sim \boxed{Mother \sqsubseteq \exists hasChild.(Person)} \; \boxed{Person \sqsubseteq (Female \sqcup Male)}$$

$$(x \wedge u) \vee (x \wedge v) \vee (y \wedge u) \vee (y \wedge v) \qquad \boxed{(x \vee y)} \wedge \boxed{(u \vee v)}$$





$$tvwu + svru + svzu + syrx + tywx = \boxed{(xy + uv)}\boxed{(sz + tw + sr)}$$

s	y	z	x
t	v	w	u
s	v	r	u
s	v	z	u
s	y	r	x
t	y	w	x

=

x	y
u	v

⋈

s	z
t	w
s	r

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗЛОЖИМОСТИ

Дана теория $\mathcal{T}$ и подсигнатура Δ // *например*, $\Delta=\emptyset$

1 даны Σ_1, Σ_2

2 существуют ли Σ_1, Σ_2

3

вычислить теории — компоненты разложения, если они существуют

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗЛОЖИМОСТИ

Дана теория $\mathcal{T}$ и подсигнатура Δ // *например*, $\Delta=\emptyset$

1 даны Σ_1, Σ_2 ? $\sim$ Σ_1 Δ Σ_2

2 существуют ли Σ_1, Σ_2 ? $\sim$ Σ_1 Δ Σ_2

3 вычислить теории — компоненты разложения, если они существуют

$$1 \xRightarrow{\text{перебор } \Sigma_1, \Sigma_2} 2$$

$$\underbrace{\exists\Sigma_1.\mathcal{T}}_{\mathcal{T}_1} \wedge \underbrace{\exists\Sigma_2.\mathcal{T}}_{\mathcal{T}_2} \vDash \mathcal{T} \Longrightarrow 2$$

$$\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2 \vDash \mathcal{T}$$

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗЛОЖИМОСТИ

Дана теория $\mathcal{T}$ и подсигнатура Δ // *например*, $\Delta=\emptyset$

1 даны Σ_1, Σ_2 ? $\sim$ Σ_1 Δ Σ_2

2 существуют ли Σ_1, Σ_2 ? $\sim$ Σ_1 Δ Σ_2

3 вычислить теории — компоненты разложения, если они существуют

$$1 \xRightarrow{\text{перебор } \Sigma_1, \Sigma_2} 2$$

перебор Σ_1, Σ_2
и следствий
в сигнатурах
$\Sigma_1 \cup \Delta, \Sigma_2 \cup \Delta$

$$2 \xLeftarrow{\text{тривиально}} 3 \Longleftarrow 2$$

$$\underbrace{\exists\Sigma_1.\mathcal{T}}_{\mathcal{T}_1} \wedge \underbrace{\exists\Sigma_2.\mathcal{T}}_{\mathcal{T}_2} \vDash \mathcal{T} \Longrightarrow 2$$

$$\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2 \vDash \mathcal{T}$$

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗЛОЖИМОСТИ

Дана теория $\mathcal{T}$ и подсигнатура Δ // *например*, $\Delta=\emptyset$

1 даны Σ_1, Σ_2 ? $\sim$ Σ_1 Δ Σ_2

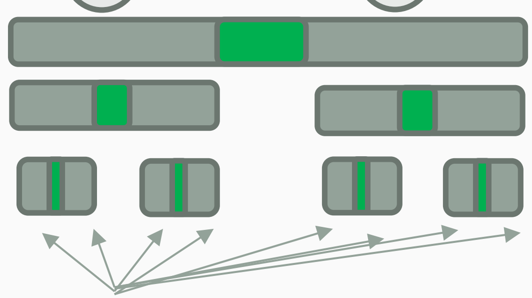
2 существуют ли Σ_1, Σ_2 ? $\sim$ Σ_1 Δ Σ_2

3 вычислить теории — компоненты разложения, если они существуют

$1 \xRightarrow{\text{перебор } \Sigma_1, \Sigma_2} 2$

$2 \xRightarrow{\text{вычисление канонического разложения}} 1$

$2 \xLeftarrow{\text{тривиально}} 3 \xLeftarrow{\text{перебор } \Sigma_1, \Sigma_2 \text{ и следствий в сигнатурах } \Sigma_1 \cup \Delta, \Sigma_2 \cup \Delta} 2$



$$\underbrace{\exists\Sigma_1.\mathcal{T}}_{\mathcal{T}_1} \wedge \underbrace{\exists\Sigma_2.\mathcal{T}}_{\mathcal{T}_2} \vDash \mathcal{T} \Rightarrow 2$$

Логика обладает свойством интерполяции Крейга $\Rightarrow$ $\Leftarrow$ + доп. условие Сигнатуры минимальных компонент разложения определяются однозначно

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗЛОЖИМОСТИ

Дана теория $\mathcal{T}$ и подсигнатура Δ // *например*, $\Delta=\emptyset$

1 даны Σ_1, Σ_2 ? $\sim$ Σ_1 Δ Σ_2

2 существуют ли Σ_1, Σ_2 ? $\sim$ Σ_1 Δ Σ_2

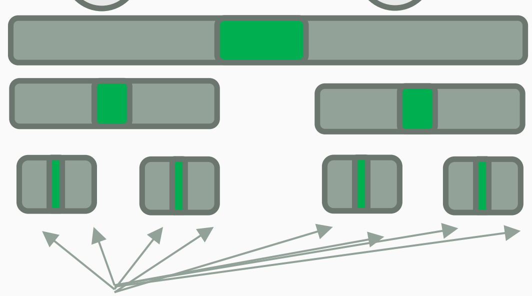
3 вычислить теории — компоненты разложения, если они существуют

1 $\xRightarrow{\text{перебор } \Sigma_1, \Sigma_2}$ 2

$\underbrace{\exists\Sigma_1.\mathcal{T}}_{\mathcal{T}_1} \wedge \underbrace{\exists\Sigma_2.\mathcal{T}}_{\mathcal{T}_2} \vDash \mathcal{T} \Rightarrow$ 2

вычисление канонического разложения

2 $\Rightarrow$ 1



перебор Σ_1, Σ_2 и следствий в сигнатурах $\Sigma_1 \cup \Delta, \Sigma_2 \cup \Delta$

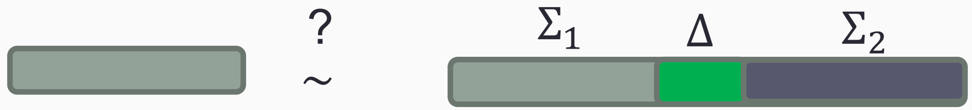
2 $\xLeftarrow{\text{тривиально}}$ 3 $\Leftarrow$ 2

логика разрешима и обладает свойством униформной интерполяции $\xRightarrow{\text{перебор } \Sigma_1, \Sigma_2}$ 3

Логика обладает свойством интерполяции Крейга $\Rightarrow$ $\Leftarrow$ (+ доп. условие) Сигнатуры минимальных компонент разложения определяются однозначно

Дана теория $\mathcal{T}$ и подсигнатура Δ // *например*, $\Delta=\emptyset$

1 даны Σ_1, Σ_2



Как правило, уже для $\Delta=\emptyset$ эта проблема алгоритмически неразрешима

Дана теория $\mathcal{T}$ и подсигнатура Δ // например, $\Delta=\emptyset$

1 даны Σ_1, Σ_2 $\overset{?}{\sim}$ Σ_1 Δ Σ_2

Как правило, уже для $\Delta=\emptyset$ эта проблема алгоритмически неразрешима

φ $\Rightarrow$ $[\vee\wedge\neg]\,(\varphi, \psi_1, \dots \psi_n)$ $\emptyset$ – разложима $\Leftrightarrow$ φ истинна

Пример для булев. формулы: $\varphi \xrightarrow{p, q \notin vars(\varphi)} (\varphi \vee p) \wedge \bigwedge_{x \in vars\{\varphi\}} (q \vee x)$ $\emptyset$ – разложима $\Leftrightarrow$ φ истинна

Дана теория $\mathcal{T}$ и подсигнатура Δ *// например, $\Delta=\emptyset$*

1 даны Σ_1, Σ_2

? $\sim$ Σ_1 Δ Σ_2

Как правило, уже для $\Delta=\emptyset$ эта проблема алгоритмически неразрешима

φ $\Rightarrow$ $[\vee \wedge \neg]\,(\varphi, \psi_1, \ldots \psi_n)$ $\emptyset$ – разложима $\Leftrightarrow$ φ истинна

Пример для булев. формулы: φ $\xrightarrow{p,q \notin vars(\varphi)}$ $(\varphi \vee p) \wedge \bigwedge_{x \in vars\{\varphi\}} (q \vee x)$ $\emptyset$ – разложима $\Leftrightarrow$ φ истинна

$\mathcal{T} \vDash P([\boldsymbol{x}], [\boldsymbol{y}]) \Leftrightarrow f(x) = y$ $\Rightarrow$ $\mathcal{T}'$ $\cup$ $\forall x P(x, [\boldsymbol{y}]) \to q$ $\emptyset$ – разложима $\Leftrightarrow$ $[\boldsymbol{y}] \in range(f)$

неразложимая

$\mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_2$

Π Π

Свойство $\emptyset$-разложимых теорий: $\Longrightarrow$ $\mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2 \vDash$

Дана теория $\mathcal{T}$ и подсигнатура Δ // например, $\Delta = \emptyset$

1 даны Σ_1, Σ_2

? $\sim$

Σ_1 Δ Σ_2

Как правило, уже для $\Delta = \emptyset$ эта проблема алгоритмически неразрешима

φ

$[\vee \wedge \neg]\,(\varphi, \psi_1, \dots \psi_n)$

$\emptyset$ – разложима $\Leftrightarrow$ φ истинна

Пример для булев. формулы: φ

$p, q \notin vars(\varphi)$

$(\varphi \vee p) \wedge \bigwedge_{x \in vars\{\varphi\}} (q \vee x)$

$\emptyset$ – разложима $\Leftrightarrow$ φ истинна

$\mathcal{T} \vDash P([\boldsymbol{x}], [\boldsymbol{y}]) \Leftrightarrow f(x) = y$

$\mathcal{T}'$ $\forall x P(x, [\boldsymbol{y}]) \rightarrow q$

$\cup$

$\emptyset$ – разложима $\Leftrightarrow [\boldsymbol{y}] \in range(f)$

неразложимая

$\mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_2$

Π Π

Свойство $\emptyset$-разложимых теорий: $\Longrightarrow$ $\mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2 \vDash$

Σ_1 Δ Δ Σ_2

и $sig(\varphi) \subseteq \Sigma_1 \cup \Delta$, тогда $\Longrightarrow$

$\mathcal{T}_1$ $\mathcal{T}_2$

$\sim$

Π Π

φ φ

Дана теория $\mathcal{T}$ и подсигнатура Δ // например, $\Delta=\emptyset$

1 даны Σ_1, Σ_2 ? $\sim$ Σ_1 Δ Σ_2

Как правило, уже для $\Delta=\emptyset$ эта проблема алгоритмически неразрешима

φ $[\vee\wedge\neg]\ (\varphi, \psi_1, \ldots \psi_n)$ $\emptyset$ – разложима $\Leftrightarrow$ φ истинна

Пример для булев. формулы: φ $\xrightarrow{p, q \notin vars(\varphi)}$ $(\varphi \vee p) \wedge \bigwedge_{x \in vars\{\varphi\}} (q \vee x)$ $\emptyset$ – разложима $\Leftrightarrow$ φ истинна

$\mathcal{T} \vDash P([\boldsymbol{x}], [\boldsymbol{y}]) \Leftrightarrow f(x) = y$ $\mathcal{T}'$ $\cup$ $\forall x P(x, [\boldsymbol{y}]) \to q$ $\emptyset$ – разложима $\Leftrightarrow [\boldsymbol{y}] \in range(f)$

неразложимая

$\mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_2$

Свойство $\emptyset$-разложимых теорий: $\Rightarrow \mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2 \vDash$

Σ_1 Δ Δ Σ_2 и $sig(\varphi) \subseteq \Sigma_1 \cup \Delta$, тогда $\Rightarrow$

$\mathcal{T}_1$ $\mathcal{T}_2$ $\sim$ φ φ

$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ разрешимы, 1 разрешима $\Rightarrow$ $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ разрешимая теория

РАЗЛОЖЕНИЕ ЧЕРЕЗ ПЕРЕПИСЫВАНИЕ АКСИОМ

$\Delta = \{\emptyset\}$

$$(\neg a \vee b) \wedge (c \vee \neg b) \wedge (\neg c \vee \neg b)$$

$$\varphi : \quad \underbrace{\boxed{}}_{\Sigma_1}\underbrace{\boxed{}}_{\Sigma_2} \vDash \underset{\Sigma_1}{\xi_1} \vee \underset{\Sigma_2}{\xi_2} \Longrightarrow \varphi \vDash \xi_1 \text{ или } \varphi \vDash \xi_2$$

$$(\neg a) \wedge (c \vee \neg b) \wedge (\neg c \vee \neg b) \Rightarrow \neg a \wedge (\neg b) \wedge (\neg c \vee \neg b) \Rightarrow \boxed{\neg a} \wedge \boxed{\neg b} \wedge (c \vee \mathbf{true})$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ЧЕРЕЗ ПЕРЕПИСЫВАНИЕ АКСИОМ

$\Delta = \{\emptyset\}$

$(\neg a \vee b) \wedge (c \vee \neg b) \wedge (\neg c \vee \neg b)$

φ : Σ_1 Σ_2 $\vDash$ $\overset{\Sigma_1 \quad \Sigma_2}{\xi_1 \vee \xi_2}$ $\Longrightarrow$ $\varphi \vDash \xi_1$ или $\varphi \vDash \xi_2$

$(\neg a) \wedge (c \vee \neg b) \wedge (\neg c \vee \neg b) \Rightarrow \neg a \wedge (\neg b) \wedge (\neg c \vee \neg b) \Rightarrow \boxed{\neg a} \wedge \boxed{\neg b} \wedge (c \vee \mathbf{true})$

$\Delta = \{d\}$

$(x \vee \neg d) \wedge (u \vee \neg x \vee d) \wedge (u \vee x \vee d) \quad \sim \quad (x \vee \neg d) \wedge (u \vee d)$

Σ_1 Δ Σ_2 $\vDash$ $\overset{\Sigma_1 \quad \Sigma_2}{\xi_1 \vee \xi_2}$ $\Longrightarrow$ $\varphi \sim (\varphi \setminus \{\xi_1 \vee \xi_2\}) \cup \{\boxed{(\neg \xi_1 \rightarrow \theta_\Delta)} \wedge \boxed{(\theta_\Delta \rightarrow \xi_2)}\}$

если знаем Σ_1, Σ_2

$\boxed{\varphi_{\Sigma_1}, \neg \xi_1} \vDash \boxed{\theta_\Delta} \vDash \boxed{\varphi_{\Sigma_2} \rightarrow \xi_2}$

РАЗЛОЖЕНИЕ ЧЕРЕЗ ПЕРЕПИСЫВАНИЕ АКСИОМ

$\Delta = \{\emptyset\}$

$$(\neg a \lor b) \land (c \lor \neg b) \land (\neg c \lor \neg b)$$

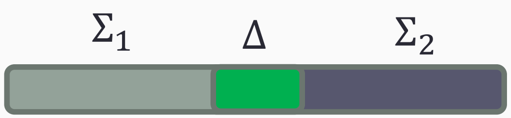
φ :

$\vDash \; \overset{\Sigma_1 \quad \Sigma_2}{\xi_1 \lor \xi_2} \implies \varphi \vDash \xi_1$ или $\varphi \vDash \xi_2$

$$(\neg a) \land (c \lor \neg b) \land (\neg c \lor \neg b) \rightarrow \neg a \land (\neg b) \land (\neg c \lor \neg b) \rightarrow \boxed{\neg a} \land \boxed{\neg b} \land (c \lor \mathbf{true})$$

$\Delta = \{d\}$

$$(x \lor \neg d) \land (u \lor \neg x \lor d) \land (u \lor x \lor d) \quad \sim \quad (x \lor \neg d) \land (u \lor d)$$



$\vDash \; \overset{\Sigma_1 \quad \Sigma_2}{\xi_1 \lor \xi_2} \implies \varphi \sim (\varphi \setminus \{\xi_1 \lor \xi_2\}) \cup \{\boxed{(\neg \xi_1 \rightarrow \theta_\Delta)} \land \boxed{(\theta_\Delta \rightarrow \xi_2)}\}$

если знаем $\Sigma_1, \ \Sigma_2$

$$\boxed{\varphi_{\Sigma_1}, \neg \xi_1} \vDash \boxed{\theta_\Delta} \vDash \boxed{\varphi_{\Sigma_2} \rightarrow \xi_2}$$

$\Delta = \{d\}$

$$\underbrace{(\neg x \lor d) \land (\neg d \lor x)}_{x \leftrightarrow \boxed{d}} \land (x \lor y) \rightarrow \boxed{(\neg x \lor d) \land (\neg d \lor x)} \land \boxed{(\boxed{d} \lor y)}$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ЧЕРЕЗ ПЕРЕПИСЫВАНИЕ АКСИОМ

$\Delta = \{\emptyset\}$

$$(\neg a \vee b) \wedge (c \vee \neg b) \wedge (\neg c \vee \neg b)$$

Σ_1 Σ_2

$\varphi :$ $\models$ Σ_1 Σ_2 $\xi_1 \vee \xi_2$ $\Longrightarrow$ $\varphi \models \xi_1$ или $\varphi \models \xi_2$

$$(\neg a) \wedge (c \vee \neg b) \wedge (\neg c \vee \neg b) \rightarrow \neg a \wedge (\neg b) \wedge (\neg c \vee \neg b) \rightarrow \boxed{\neg a} \wedge \boxed{\neg b} \wedge (c \vee \mathbf{true})$$

$\Delta = \{d\}$

$$(x \vee \neg d) \wedge (u \vee \neg x \vee d) \wedge (u \vee x \vee d) \quad \sim \quad (x \vee \neg d) \wedge (u \vee d)$$

Σ_1 Δ Σ_2 $\models$ Σ_1 Σ_2 $\xi_1 \vee \xi_2$ $\Longrightarrow$ $\varphi \sim (\varphi \setminus \{\xi_1 \vee \xi_2\}) \cup \{\boxed{(\neg\xi_1 \rightarrow \theta_\Delta)} \wedge \boxed{(\theta_\Delta \rightarrow \xi_2)}\}$

если знаем $\Sigma_1, \ \Sigma_2$

$$\boxed{\varphi_{\Sigma_1}, \neg\xi_1} \models \boxed{\theta_\Delta} \models \boxed{\varphi_{\Sigma_2} \rightarrow \xi_2}$$

$\Delta = \{d\}$

$$\underbrace{(\neg x \vee d) \wedge (\neg d \vee x)}_{x \leftrightarrow \boxed{d}} \wedge (x \vee y) \rightarrow \boxed{(\neg x \vee d) \wedge (\neg d \vee x)} \wedge \boxed{(\boxed{d} \vee y)}$$

$$A_2 \equiv \exists R_1 . A_1 \sqcap \exists R_2 . A_1$$
$$A_1 \equiv \exists R_1 . A_0 \sqcap \exists R_2 . A_0$$
$$A_0 \equiv D$$

$\Delta = \{R_1, R_2, D\}$ $\rightarrow$

$$\boxed{A_2 \equiv \exists R_1 . (\exists R_1 . D \sqcap \exists R_2 . D) \sqcap \exists R_2 . (\exists R_1 . D \sqcap \exists R_2 . D)}$$
$$\boxed{A_1 \equiv \exists R_1 . D \sqcap \exists R_2 . D}$$
$$\boxed{A_0 \equiv D}$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

Позитивные КНФ, Δ - произвольное

удаление избыточных клауз

$(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \wedge (x \vee a \vee b) \wedge (y \vee a \vee \text{true}) \Longrightarrow \boxed{(x \vee y)} \wedge \boxed{(a \vee b)}$

каноническое представление

РАЗЛОЖЕНИЕ ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

Позитивные КНФ, Δ - произвольное

$$(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \wedge (x \vee a \vee b) \wedge (y \vee a \vee \mathrm{true}) \xrightarrow[\text{каноническое представление}]{\text{удаление избыточных клауз}} \boxed{(x \vee y)} \wedge \boxed{(a \vee b)}$$

Позитивные ДНФ, $\Delta=\emptyset$

$$(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{a}) \vee (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{a}) \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (x \wedge y \wedge b) \xrightarrow[\text{переписывание в полином}]{\text{удаление избыточных конъюнкций}} \boldsymbol{xa} + \boldsymbol{xb} + \boldsymbol{ya} + \boldsymbol{yb} = (x+y)(a+b)$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

Позитивные КНФ, Δ - произвольное

удаление избыточных клауз

$$(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \wedge (x \vee a \vee b) \wedge (y \vee a \vee \text{true}) \longrightarrow \boxed{(x \vee y)} \wedge \boxed{(a \vee b)}$$

каноническое представление

Позитивные ДНФ, Δ=∅

удаление избыточных конъюнкций

$$(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{a}) \vee (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{a}) \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (x \wedge y \wedge b) \longrightarrow \boldsymbol{xa} + \boldsymbol{xb} + \boldsymbol{ya} + \boldsymbol{yb} = (x+y)(a+b)$$

переписывание в полином

Совершенные ДНФ, Δ - произвольное

x	d	a
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1

$$\varphi = \underbrace{\boxed{xda \vee xd\neg a \vee \neg xda \vee \neg xd\neg a}}_{xa \vee x\neg a \vee \neg xa \vee \neg x\neg a} \vee \underbrace{\neg x\neg da}_{\neg xa}$$

d

$\neg d$

РАЗЛОЖЕНИЕ ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

Позитивные КНФ, Δ - произвольное

удаление избыточных клауз

$$(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \wedge (x \vee a \vee b) \wedge (y \vee a \vee \text{true}) \longrightarrow \boxed{(x \vee y)} \wedge \boxed{(a \vee b)}$$

каноническое представление

Позитивные ДНФ, Δ=∅

удаление избыточных конъюнкций

$$(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{a}) \vee (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{a}) \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (x \wedge y \wedge b) \longrightarrow \boldsymbol{xa} + \boldsymbol{xb} + \boldsymbol{ya} + \boldsymbol{yb} = (x+y)(a+b)$$

переписывание в полином

Совершенные ДНФ, Δ - произвольное

x	d	a
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1

$$\varphi = \underbrace{\boxed{xda \vee xd\neg a \vee \neg xda \vee \neg xd\neg a}}_{d} \vee \underbrace{\neg x \neg da}_{\neg d}$$

$$xa \vee x\neg a \vee \neg xa \vee \neg x\neg a \qquad \neg xa$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$xa + x\bar{a} + \bar{x}a + \bar{x}\bar{a} \qquad \bar{x}a$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$(x+\bar{x})(a+\bar{a}) \qquad \bar{x}a$$

для случаев d и $\neg d$ получаем:

$$\boxed{\Sigma_1 = \{x\}, \Sigma_2 = \{a\}}$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

Позитивные КНФ, Δ - произвольное

удаление избыточных клауз

$$(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \wedge (x \vee a \vee b) \wedge (y \vee a \vee \text{true}) \longrightarrow \boxed{(x \vee y)} \wedge \boxed{(a \vee b)}$$

каноническое представление

Позитивные ДНФ, $\Delta=\emptyset$

удаление избыточных конъюнкций

$$(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{a}) \vee (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{a}) \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (x \wedge y \wedge b) \longrightarrow \boldsymbol{xa} + \boldsymbol{xb} + \boldsymbol{ya} + \boldsymbol{yb} = (x+y)(a+b)$$

переписывание в полином

Совершенные ДНФ, Δ - произвольное

x	d	a
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1

$$\varphi = \underbrace{\boxed{xda \vee xd\neg a \vee \neg xda \vee \neg xd\neg a}}_{d} \vee \underbrace{\neg x \neg da}_{\neg d}$$

$$xa \vee x\neg a \vee \neg xa \vee \neg x \neg a \qquad \neg xa$$

$$xa + x\bar{a} + \bar{x}a + \bar{x}\bar{a} \qquad \bar{x}a$$

$$(x+\bar{x})(a+\bar{a}) \qquad \bar{x}a$$

для случаев d и $\neg d$ получаем:

$$\boxed{\Sigma_1 = \{x\}, \Sigma_2 = \{a\}}$$

$$\varphi \sim \boxed{\overbrace{(xd \vee \neg xd \vee \neg xd \vee \neg x \neg d)}^{\varphi|_{\Sigma_1 \cup \{d\}}}} \wedge \boxed{\overbrace{(da \vee d\neg a \vee \neg d\ a)}^{\varphi|_{\Sigma_2 \cup \{d\}}}}$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

Позитивные КНФ, Δ - произвольное

удаление избыточных клауз

$$(\boldsymbol{x} \lor \boldsymbol{y}) \land (\boldsymbol{a} \lor \boldsymbol{b}) \land (x \lor a \lor b) \land (y \lor a \lor \text{true}) \longrightarrow \boxed{(x \lor y)} \land \boxed{(a \lor b)}$$

каноническое представление

Позитивные ДНФ, Δ=∅

удаление избыточных конъюнкций

$$(\boldsymbol{x} \land \boldsymbol{a}) \lor (\boldsymbol{x} \land \boldsymbol{b}) \lor (\boldsymbol{y} \land \boldsymbol{a}) \lor (\boldsymbol{y} \land \boldsymbol{b}) \lor (x \land y \land b) \longrightarrow \boldsymbol{xa} + \boldsymbol{xb} + \boldsymbol{ya} + \boldsymbol{yb} = (x+y)(a+b)$$

переписывание в полином

Совершенные ДНФ, Δ - произвольное

x	d	a
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1

$$\varphi = \underbrace{\boxed{xda \lor xd\neg a \lor \neg xda \lor \neg xd\neg a}}_{d} \lor \underbrace{\neg x\neg da}_{\neg d}$$

$$xa \lor x\neg a \lor \neg xa \lor \neg x\neg a \qquad\qquad \neg xa$$

$$xa + x\bar{a} + \bar{x}a + \bar{x}\bar{a} \qquad\qquad \bar{x}a$$

$$(x+\bar{x})(a+\bar{a}) \qquad\qquad \bar{x}a$$

для случаев d и $\neg d$ получаем:

$$\boxed{\Sigma_1 = \{x\}, \Sigma_2 = \{a\}}$$

$$\varphi \sim \boxed{\overbrace{(xd \lor \neg xd \lor \neg xd \lor \neg x\neg d)}^{\varphi|_{\Sigma_1 \cup \{d\}}}} \land \boxed{\overbrace{(da \lor d\neg a \lor \neg d\, a)}^{\varphi|_{\Sigma_2 \cup \{d\}}}}$$

Позитивные ДНФ, Δ - произвольное

$$\varphi = xad_1 \lor yad_1d_2 \lor xbd_1d_2d_3 \lor ybd_2d_3$$

$\{d_1\} \cup \{d_1, d_2\}$ $\qquad\qquad$ $\{d_1, d_2, d_3\}$

$$\boxed{\Sigma_1 = \{x, y\}, \Sigma_2 = \{a\}} \quad xa \lor ya \qquad xa \lor ya \lor xb \lor yb \quad \boxed{\Sigma_1 = \{x, y\}, \Sigma_2 = \{a, b\}}$$

$$\varphi \sim \boxed{(xd_1 \lor yd_2)} \land \boxed{(ad_1 \lor bd_2d_3)}$$

АЛГОРИТМ ФАКТОРИЗАЦИИ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ БУЛЕВЫХ ПОЛИНОМОВ

Пример для полинома $F = xsy + xty + usv + utv \quad [= (xy + uv)\cdot(s+t)]$

АЛГОРИТМ ФАКТОРИЗАЦИИ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ БУЛЕВЫХ ПОЛИНОМОВ

Пример для полинома $F = xsy + xty + usv + utv \quad [= (xy + uv)\cdot(s+t)]$

---

1. $F_1 = F_{x=0} = usv + utv \qquad F_2 = \partial F / \partial x = ys + yt \qquad \Sigma_{same} = \{x\} \qquad \Sigma_{other} = \varnothing$

АЛГОРИТМ ФАКТОРИЗАЦИИ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ БУЛЕВЫХ ПОЛИНОМОВ

Пример для полинома $F = xsy + xty + usv + utv \quad [= (xy + uv) \cdot (s + t)]$

1. $F_1 = F_{x=0} = usv + utv \qquad F_2 = \partial F / \partial x = ys + yt \qquad \Sigma_{same} = \{x\} \qquad \Sigma_{other} = \varnothing$

2. Для каждой переменной $z \in Vars(F) \setminus \{x\}$: вычисляем: $\dfrac{\partial (F_1 \cdot F_2)}{\partial z}$

$\partial(F_1 \cdot F_2)/\partial z = 0 \Rightarrow \Sigma_{other} = \Sigma_{other} \cup \{z\} \qquad \partial(F_1 \cdot F_2)/\partial z \neq 0 \Rightarrow \Sigma_{same} = \Sigma_{same} \cup \{z\}$

пример:

$$\partial(F_1 \cdot F_2)/\partial s = uv(ys + yt) + (usv + utv) \cdot y = uvys + uvyt + uvys + uvyt = 0 \quad \Rightarrow \Sigma_{other} = \Sigma_{other} \cup \{s\}$$

$$\partial(F_1 \cdot F_2)/\partial u = (sv + tv) \cdot F_2 + F_1 \cdot 0 = svy + svyt + tvys + tvy \neq 0 \quad \Rightarrow \Sigma_{same} = \Sigma_{same} \cup \{u\}$$

АЛГОРИТМ ФАКТОРИЗАЦИИ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ БУЛЕВЫХ ПОЛИНОМОВ

Пример для полинома $F = xsy + xty + usv + utv \quad [= (xy + uv) \cdot (s + t)]$

1. $F_1 = F_{x=0} = usv + utv \qquad F_2 = \partial F / \partial x = ys + yt \qquad \Sigma_{same} = \{x\} \qquad \Sigma_{other} = \varnothing$

2. Для каждой переменной $z \in Vars(F) \setminus \{x\}$: вычисляем: $\dfrac{\partial(F_1 \cdot F_2)}{\partial z}$

$$\partial(F_1 \cdot F_2)/\partial z = 0 \Rightarrow \Sigma_{other} = \Sigma_{other} \cup \{z\} \qquad \partial(F_1 \cdot F_2)/\partial z \neq 0 \Rightarrow \Sigma_{same} = \Sigma_{same} \cup \{z\}$$

пример:

$$\partial(F_1 \cdot F_2)/\partial s = uv(ys + yt) + (usv + utv) \cdot y = uvys + uvyt + uvys + uvyt = 0 \quad \Rightarrow \Sigma_{other} = \Sigma_{other} \cup \{s\}$$

$$\partial(F_1 \cdot F_2)/\partial u = (sv + tv) \cdot F_2 + F_1 \cdot 0 = svy + svyt + tvys + tvy \neq 0 \quad \Rightarrow \Sigma_{same} = \Sigma_{same} \cup \{u\}$$

3. В итоге получаем разбиение переменных $\Sigma_{same} = \{x, u, y, v\} \quad \Sigma_{other} = \{s, t\}$

$$F_{same} = F / \Sigma_{same} = xy + uv \qquad F_{other} = F / \Sigma_{other} = s + t$$

$F_{same} \cdot F_{other} = F \quad \Leftrightarrow$ полином факторизуем

ФАКТОРИЗАЦИЯ БУЛ. ПОЛИНОМОВ: ПРИМЕНЕНИЯ

Нахождение зависимостей и сжатие данных

Participant	Tutorial	Course	Subject
P1	T1	C1	S1
P1	T1	C1	S2
P1	T1	C2	S3
P2	T1	C1	S1
P2	T1	C1	S2
P2	T1	C2	S3
P1	T2	C2	S3

=

Participant	Tutorial
P1	T1
P2	T1
P1	T2

⋈

Tutorial	Course
T1	C1
T1	C2
T2	C2

⋈

Course	Subject
C1	S1
C1	S2
C2	S3

Полином для Tutotiral=T1 : $P_1C_1S_1 + P_1C_1S_2 + P_1C_2S_3 + P_2C_1S_1 + P_2C_1S_2 + P\_2C_2S_3$

В общем случае – нахождение разложений: $\mathcal{R} = \bigcup_{i=1\dots m} \mathcal{R}_1^i \bowtie \cdots \bowtie \mathcal{R}_n^i$

ФАКТОРИЗАЦИЯ БУЛ. ПОЛИНОМОВ: ПРИМЕНЕНИЯ

Нахождение зависимостей и сжатие данных

Participant	Tutorial	Course	Subject
P1	T1	C1	S1
P1	T1	C1	S2
P1	T1	C2	S3
P2	T1	C1	S1
P2	T1	C1	S2
P2	T1	C2	S3
P1	T2	C2	S3

=

Participant	Tutorial
P1	T1
P2	T1
P1	T2

$\bowtie$

Tutorial	Course
T1	C1
T1	C2
T2	C2

$\bowtie$

Course	Subject
C1	S1
C1	S2
C2	S3

Полином для Tutotiral=T1 : $P_1C_1S_1 + P_1C_1S_2 + P_1C_2S_3 + P_2C_1S_1 + P_2C_1S_2 + P_2C_2S_3$

В общем случае – нахождение разложений: $\mathcal{R} = \bigcup_{i=1\ldots m} \mathcal{R}_1^i \bowtie \cdots \bowtie \mathcal{R}_n^i$

Многоуровневая декомпозиция булевых функций, в том числе монотонных

$x(a(c \vee b) \vee de)(z \vee y) \vee (a(c \vee b) \vee de)(t \vee s)(w \vee v \vee u)$

Espresso-optimizer

$absu \vee absv \vee absw \vee abtu \vee abtv \vee abtw \vee abxy \vee abxz \vee$
$acsu \vee acsv \vee acsw \vee actu \vee actv \vee actw \vee acxy \vee acxz \vee$
$desu \vee desv \vee desw \vee detu \vee detv \vee detw \vee dexy \vee dexz$

AND-разложение с помощью полином. факторизации

$a(b \vee c) \vee de)(s \vee t)(u \vee v \vee w) \vee x(y \vee z)$

СЛОЖНОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ В РАЗНЫХ ЯЗЫКАХ/ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

1 даны Σ_1, Σ_2 ? $\sim$ Σ_1 Δ Σ_2

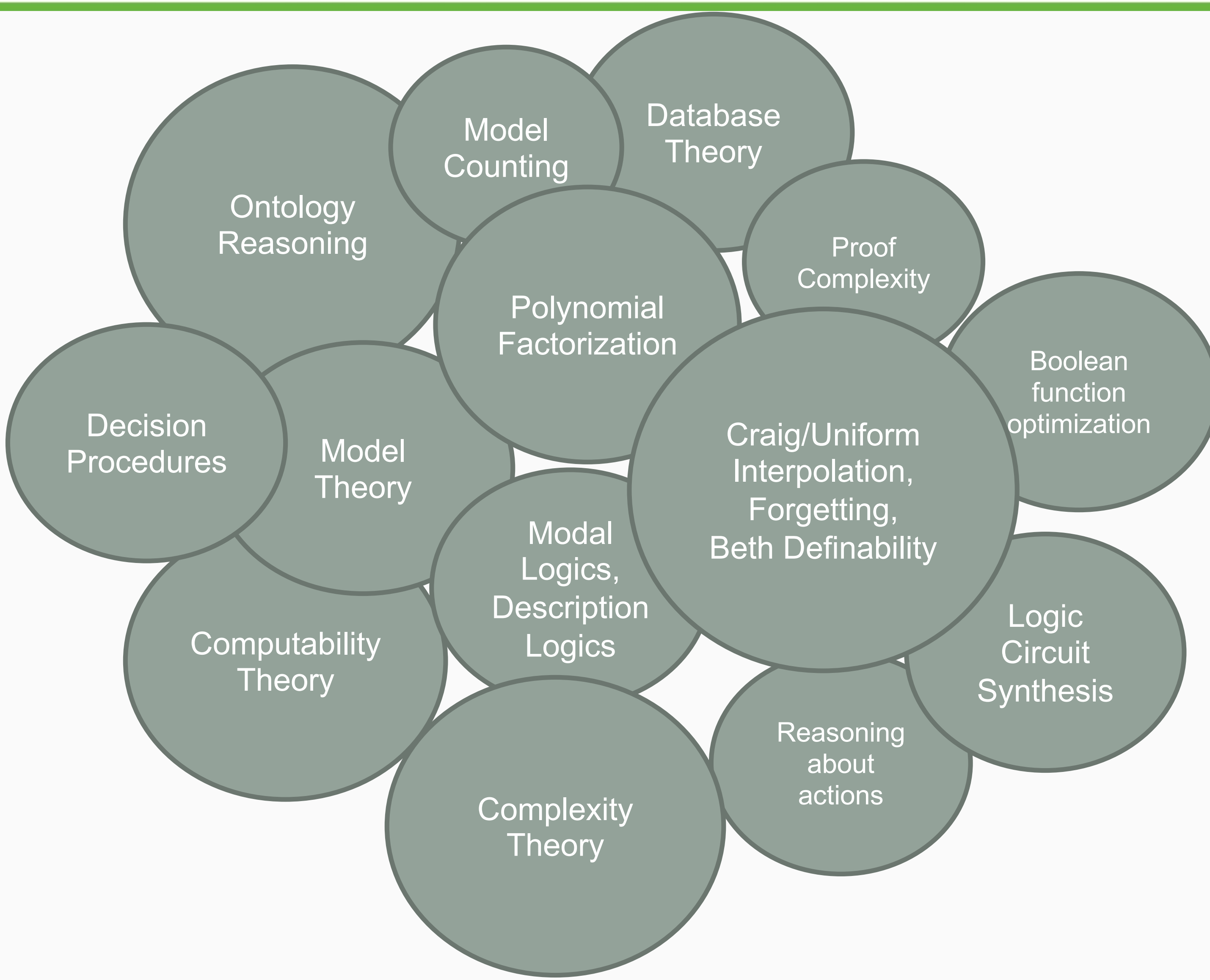
Фрагменты/теории логики первого порядка

Дескрипционные логики – формализмы для представления терминологических систем - онтологий

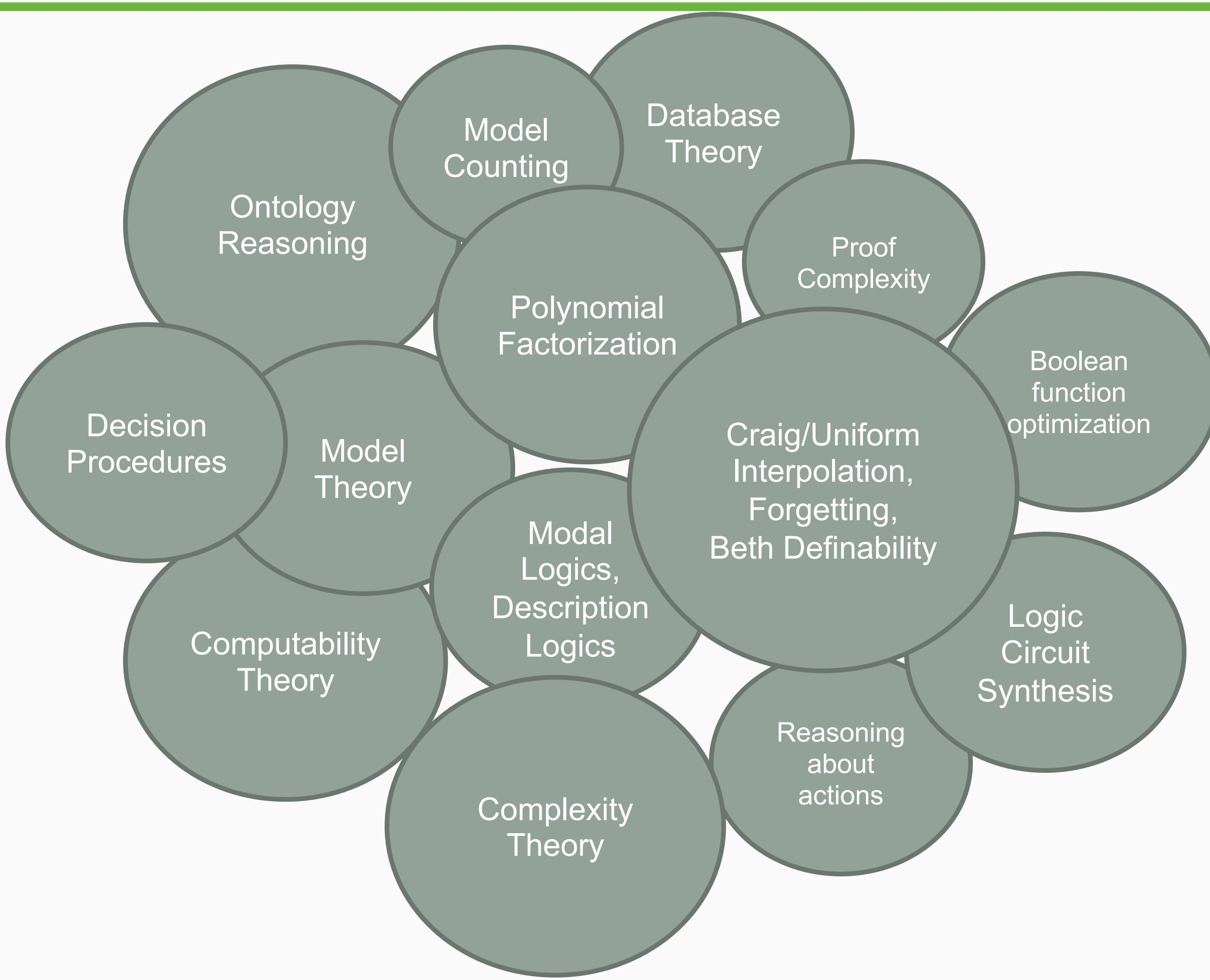
Не только может быть проверена разложимость, но и компоненты разложения вычислимы за PTIME

Язык/Представление	Сложность проблемы 1	Примечание
Логические программы	р.п.-полна	уже для $\Delta=\emptyset$
Теории *сложных* сигнатур (вкл. двухместный предикат/функцию или две одноместные ф-ии)	р.п.-полна	уже для $\Delta=\emptyset$
Монадический фрагмент	coNEXPTIME-полна	Компоненты разложения – униформные интерполянты
$\mathcal{ALC}$	EXPTIME-полна	Компоненты разложения могут иметь двойной экспоненциальный размер
$\mathcal{EL}$	PTIME	Компоненты разложения могут иметь экспоненциальный размер
$\mathcal{DL}-Lite_{core}$ $\mathcal{DL}-LiteHorn$	PTIME	
КНФ	coNP-полна	$\emptyset$-разложения можно найти за P^{NP}
Позитивные КНФ	PTIME	эквивалентные поз. КНФ без избыточных клауз синтаксически равны
Позитивные ДНФ	PTIME	
Совершенные ДНФ	PTIME	
АНФ (полиномы Жегалкина)	PTIME	для $\Delta=\emptyset$

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ТЕОРИЙ - СВЯЗЫВАЕТ ОБЛАСТИ ЗНАНИЙ:



ДЕКОМПОЗИЦИЯ ТЕОРИЙ - СВЯЗЫВАЕТ ОБЛАСТИ ЗНАНИЙ:



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ