

Разрешимые свойства логик

Лариса Львовна Максимова,
Вета Федоровна Юн

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск

Рассматриваем логики над минимальной логикой Йохансона J и нормальные модальные логики.

Связки: $\&$, \vee , \rightarrow ; константы: \perp , \top ; $\neg A = A \rightarrow \perp$

Схемы аксиом:

- 1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- 2 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 3 $A \& B \rightarrow A$
- 4 $A \& B \rightarrow B$
- 5 $A \rightarrow (B \rightarrow A \& B)$
- 6 $A \rightarrow A \vee B$
- 7 $B \rightarrow A \vee B$
- 8 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

Правило вывода: $A, A \rightarrow B / B$

J-логика — любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно modus ponens и правила подстановки.

$$\text{Int} = J + (\perp \rightarrow p), \text{ Neg} = J + \perp, \text{ For} = J + p,$$

$$\text{Od} = J + \neg\neg(\perp \rightarrow p), \text{ Hyb} = J + (\perp \vee \perp \rightarrow p).$$

Суперинтуиционистская логика — J-логика, содержащая интуиционистскую логику Int.

Негативная логика — J-логика, содержащая логику Neg.

Различимость и узнаваемость

Для любой J-логики L_0 формула A **различима над L_0** , если существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax схем аксиом решает, доказуема ли A в $L_0 + Ax$.

Пусть L - конечно аксиоматизируемая логика, содержащая L_0 . Говорим, что L **различима над L_0** , если существует алгоритм, распознающий по любой конечной системе Ax схем аксиом, верно ли включение $L_0 + Ax \geq L$.

Логика L **сильно различима над L_0** , если существует алгоритм, проверяющий соотношение $L_0 + Rul \geq L$ для любого конечного множества Rul аксиом и правил вывода.

Логика L **узнаваема над L_0** , если существует алгоритм, проверяющий по любой конечной системе Ax схем аксиом, верно ли равенство $L_0 + Ax = L$.

Логика L **сильно узнаваема над L_0** , если существует алгоритм, распознающий совпадение L с $L_0 + Rul$.

Пусть L, L_0 – конечно аксиоматизируемые логики, $L \supseteq L_0$.

Теорема 1.

(1) L узнаваема над $L_0 \iff L$ разрешима и различима над L_0 .

(2) L сильно узнаваема над L_0 и разрешима по допустимости правил $\Rightarrow L$ сильно узнаваема над $L_0 \Rightarrow L$ узнаваема над L_0 и разрешима по допустимости правил.

ПРИМЕРЫ:

Предложение 1. [М-Ю 2015] Логика Int узнаваема над J .

Предложение 2. [М-Ю 2017] Логика $\text{Neg}=\mathbf{J}+\perp$ сильно узнаваема над J .

Предложение 3 . [М-Ю 2017] Логики J ; Neg ; Gl ; KC ; LC и все ее расширения; NC и все ее расширения сильно узнаваемы над J .

Предложение 4. [М-Ю 2019] Логика Int сильно узнаваема над Od и Hvb .

Неизвестно, является ли Int сильно узнаваемой над J .

Разрешимые свойства

Свойство логик P *разрешимо над* логикой L_0 , если существует алгоритм, проверяющий по любой формуле A , обладает ли логика $L_0 + A$ свойством P ; свойство P *сильно разрешимо над* L_0 , если такой алгоритм существует для всех конечных множеств Rul , составленных из схем аксиом и правил вывода.

Изучаются проблема узнаваемости, свойства табличности и предтабличности, различные интерполяционные свойства в классах расширений логики J и модальных логик.

Теорема.

Интерполяционные свойства CIP, IPD разрешимы над Int [М 1977], сильно разрешимы над Int [М 2000], разрешимы над $S4$ [М 1979].

Проблема интерполяции полностью решена над Int.

Табличность и предтабличность над J и S4

Логика называется *табличной*, если она характеризуется некоторой конечной моделью.

Логика является *предтабличной*, если она не является табличной, но все ее собственные расширения табличны.

Теорема.

Проблемы табличности и предтабличности разрешимы над J и S4.

ФАКТЫ:

1. Пусть L - модальная логика или J-логика.

L таблична $\iff L$ не содержится ни в одной из предтабличных логик.

2. Существует точно 3 предтабличных с.и.л. [М 1972],
5 предтабличных расширений логики $S4$ [М 1975, Esakia-Meskhi 1977], 7 предтабличных J-логик [М-Ю 2016].

3. Все указанные предтабличные логики разрешимы и узнаваемы в соответствующих областях.

Существует континуум предтабличных логик над $K4$ (W.Blok 1980).

Проблема табличности над $K4$ неразрешима (A.Chagrov).

Определения интерполяционных свойств

CIP: Если $L \vdash A \rightarrow B$, то существует C , содержащая лишь общие переменные A и B и такая, что $L \vdash A \rightarrow C$ и $L \vdash C \rightarrow B$.

IPD: Если $L, A \vdash B$, то существует C , содержащая лишь общие переменные A и B и такая, что $L, A \vdash C$ и $L, C \vdash B$.

IPR: Если $L, A(p, r), B(p, q) \vdash C(p)$, то существует $A'(p)$ такая, что $L, A(p, q) \vdash A'(p)$ и $L, A'(p), B(p, q) \vdash C(p)$.

WIP: Если $L, A(p, r), B(p, q) \vdash \perp$, то существует $A'(p)$ такая, что $L, A(p, q) \vdash A'(p)$ и $L, A'(p), B(p, q) \vdash \perp$.

PBP: Если $A(x, p, y), A(x, q', z) \vdash_L (y \leftrightarrow z)$, то существует $B(p)$ такая, что $A(x, p, y) \vdash_L (y \leftrightarrow B(p))$.

Над J: $CIP \rightarrow IPD \rightarrow PBP \rightarrow IPR \rightarrow WIP$

Над Int: $CIP \leftrightarrow IPD \rightarrow PBP \rightarrow IPR \rightarrow WIP$

Над K4: $CIP \rightarrow IPD \rightarrow PBP \rightarrow IPR \rightarrow WIP$

Интерполяционные свойства

Теорема.

Проблема интерполяции полностью решена над Int . CIP разрешимо в с.и.л. [М 1977] и над $S4$ [М 1979].

ФАКТЫ:

1. Все с.и.л. с CIP, IPR и PBP полностью описаны.
2. Каждая из них узнаваема и даже сильно узнаваема над Int [М 1977, М 2000].
3. Существует точно 8 с.и.л. с CIP. Все с.и.л. имеют WIP.

ФАКТЫ:

1. Слабое интерполяционное свойство WIP разрешимо над J [М 2011], $wK4 = K + p \& \Box p \rightarrow \Box \Box p$ [Карпенко 2012].
2. Существует континуум слабо транзитивных модальных логик с WIP и континуум J-логик с WIP.

IPR над S4 [М 2013]:






Теорема 1. Существует лишь конечное число логик над S4 с IPR.



Теорема 2. Все логики над S4 с IPR узнаваемы над S4.

Следствие.

Интерполяционные свойства CIP, IPR, проективное свойство Бета PBP разрешимы над S4.

THANK YOU!

-  [М 1972] Л.Л.Максимова. *Предтабличные суперинтуиционистские логики*. Алгебра и логика, 11, 5, 1972, 558–570.
-  [М 1975] Л.Л.Максимова. *Предтабличные расширения логики S_4 Льюиса*. Алгебра и логика, 14, 1, 1975, 28–55.
-  [М 1977] Л.Л.Максимова. *Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия*. Алгебра и логика, 16, 6, 1977, 643–681.
-  [М 1979] Л.Л. Максимова. *Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр*. Алгебра и логика, 18, 1979, 556–586.
-  [М 2000] L.Maksimova. *Strongly decidable properties of modal and intuitionistic calculi*. Logic Journal of the IGPL 8, 6, 2000, 797–819.

-  [М 2011] Л.Л.Максимова. *Разрешимость слабого интерполяционного свойства над минимальной логикой*. Алгебра и логика, 50, 2, 2011, 152–188.
-  [М 2013] Л.Л.Максимова. *Ограниченная интерполяция над модальной логикой S4*. Алгебра и логика, 52, 4, 2013, 461–501.
-  [М-Ю 2015] Л.Л.Максимова, В.Ф.Юн. *Узнаваемые логики*. Алгебра и логика, 2015, 54, 2, 252–274
-  [М-Ю 2016] Л.Л.Максимова, В.Ф. Юн. *Проблема табличности над минимальной логикой*. Сибирский математический журнал, 57, 6, 2016, 1320–1332.
-  [М-Ю 2017] Л.Л.Максимова, В.Ф.Юн. *Сильная разрешимость и сильная узнаваемость*. Алгебра и логика, 56, 5, 2017, 559–581 .



[М-Ю 2017-1] Л.Л. Максимова, В.Ф.Юн. *Слои и уровни расширений минимальной логики*. Сибирский математический журнал, 58, 6, 2017, 1341–1353.



[М-Ю 2018] Л.Л.Максимова, В.Ф.Юн. *Сильная вычислимость слоев над логикой $G1$* . Сибирские Электронные Математические Известия, 15, 2018, 35–47.