

# Разрешимые свойства логик

Лариса Львовна Максимова,  
Вета Федоровна Юн

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск

Рассматриваем логики над минимальной логикой Йохансона  $J$  и нормальные модальные логики.

Связки:  $\&, \vee, \rightarrow$ ; константы:  $\perp, \top$ ;  $\neg A = A \rightarrow \perp$

Схемы аксиом:

- 1  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- 2  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 3  $A \& B \rightarrow A$
- 4  $A \& B \rightarrow B$
- 5  $A \rightarrow (B \rightarrow A \& B)$
- 6  $A \rightarrow A \vee B$
- 7  $B \rightarrow A \vee B$
- 8  $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

Правило вывода:  $A, A \rightarrow B / B$

*J-логика* — любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно modus ponens и правила подстановки.

$$\text{Int} = J + (\perp \rightarrow p), \text{ Neg} = J + \perp, \text{ For} = J + p,$$

$$\text{Od} = J + \neg\neg(\perp \rightarrow p), \text{ Hyb} = J + (\perp \vee \perp \rightarrow p).$$

*Суперинтуиционистская логика* — J-логика, содержащая интуиционистскую логику Int.

*Негативная логика* — J-логика, содержащая логику Neg.

## Различимость и узнаваемость

Для любой J-логики  $L_0$  формула  $A$  **различима над  $L_0$** , если существует алгоритм, который по любой конечной системе  $Ax$  схем аксиом решает, доказуема ли  $A$  в  $L_0 + Ax$ .

Пусть  $L$  - конечно аксиоматизируемая логика, содержащая  $L_0$ . Говорим, что  $L$  **различима над  $L_0$** , если существует алгоритм, распознающий по любой конечной системе  $Ax$  схем аксиом, верно ли включение  $L_0 + Ax \geq L$ .

Логика  $L$  **сильно различима над  $L_0$** , если существует алгоритм, проверяющий соотношение  $L_0 + Rul \geq L$  для любого конечного множества  $Rul$  аксиом и правил вывода.

Логика  $L$  **узнаваема над  $L_0$** , если существует алгоритм, проверяющий по любой конечной системе  $Ax$  схем аксиом, верно ли равенство  $L_0 + Ax = L$ .

Логика  $L$  **сильно узнаваема над  $L_0$** , если существует алгоритм, распознающий совпадение  $L$  с  $L_0 + Rul$ .

Пусть  $L, L_0$  – конечно аксиоматизируемые логики,  $L \supseteq L_0$ .

### Теорема 1.

(1)  $L$  узнаваема над  $L_0 \iff L$  разрешима и различима над  $L_0$ .

(2)  $L$  сильно узнаваема над  $L_0$  и разрешима по допустимости правил  $\Rightarrow L$  сильно узнаваема над  $L_0 \Rightarrow L$  узнаваема над  $L_0$  и разрешима по допустимости правил.

## ПРИМЕРЫ:

**Предложение 1.** [М-Ю 2015] Логика  $\text{Int}$  узнаваема над  $J$ .

**Предложение 2.** [М-Ю 2017] Логика  $\text{Neg}=\mathbf{J}+\perp$  сильно узнаваема над  $J$ .

**Предложение 3 .** [М-Ю 2017] Логики  $J$ ;  $\text{Neg}$ ;  $\text{Gl}$ ;  $\text{KC}$ ;  $\text{LC}$  и все ее расширения;  $\text{NC}$  и все ее расширения сильно узнаваемы над  $J$ .

**Предложение 4.** [М-Ю 2019] Логика  $\text{Int}$  сильно узнаваема над  $\text{Od}$  и  $\text{Hvb}$ .

Неизвестно, является ли  $\text{Int}$  сильно узнаваемой над  $J$ .

## Разрешимые свойства

Свойство логик  $P$  *разрешимо над* логикой  $L_0$ , если существует алгоритм, проверяющий по любой формуле  $A$ , обладает ли логика  $L_0 + A$  свойством  $P$ ; свойство  $P$  *сильно разрешимо над*  $L_0$ , если такой алгоритм существует для всех конечных множеств  $Rul$ , составленных из схем аксиом и правил вывода.

Изучаются проблема узнаваемости, свойства табличности и предтабличности, различные интерполяционные свойства в классах расширений логики  $J$  и модальных логик.

### Теорема.

Интерполяционные свойства CIP, IPD разрешимы над Int [M 1977], сильно разрешимы над Int [M 2000], разрешимы над  $S4$  [M 1979].

Проблема интерполяции полностью решена над Int.

## Табличность и предтабличность над J и S4

Логика называется *табличной*, если она характеризуется некоторой конечной моделью.

Логика является *предтабличной*, если она не является табличной, но все ее собственные расширения табличны.

Теорема.

Проблемы табличности и предтабличности разрешимы над J и S4.

## ФАКТЫ:

1. Пусть  $L$  - модальная логика или J-логика.

$L$  таблична  $\iff L$  не содержится ни в одной из предтабличных логик.

2. Существует точно 3 предтабличных с.и.л. [М 1972],  
5 предтабличных расширений логики  $S4$  [М 1975, Esakia-Meskhi 1977], 7 предтабличных J-логик [М-Ю 2016].

3. Все указанные предтабличные логики разрешимы и узнаваемы в соответствующих областях.

Существует континуум предтабличных логик над  $K4$  (W.Blok 1980).

Проблема табличности над  $K4$  неразрешима (A.Chagrov).

## Определения интерполяционных свойств

**CIP:** Если  $L \vdash A \rightarrow B$ , то существует  $C$ , содержащая лишь общие переменные  $A$  и  $B$  и такая, что  $L \vdash A \rightarrow C$  и  $L \vdash C \rightarrow B$ .

**IPD:** Если  $L, A \vdash B$ , то существует  $C$ , содержащая лишь общие переменные  $A$  и  $B$  и такая, что  $L, A \vdash C$  и  $L, C \vdash B$ .

**IPR:** Если  $L, A(p, r), B(p, q) \vdash C(p)$ , то существует  $A'(p)$  такая, что  $L, A(p, q) \vdash A'(p)$  и  $L, A'(p), B(p, q) \vdash C(p)$ .

**WIP:** Если  $L, A(p, r), B(p, q) \vdash \perp$ , то существует  $A'(p)$  такая, что  $L, A(p, q) \vdash A'(p)$  и  $L, A'(p), B(p, q) \vdash \perp$ .

**PBP:** Если  $A(x, p, y), A(x, q', z) \vdash_L (y \leftrightarrow z)$ , то существует  $B(p)$  такая, что  $A(x, p, y) \vdash_L (y \leftrightarrow B(p))$ .

Над J:  $CIP \rightarrow IPD \rightarrow PBP \rightarrow IPR \rightarrow WIP$

Над Int:  $CIP \leftrightarrow IPD \rightarrow PBP \rightarrow IPR \rightarrow WIP$

Над K4:  $CIP \rightarrow IPD \rightarrow PBP \rightarrow IPR \rightarrow WIP$

## Интерполяционные свойства

### Теорема.

Проблема интерполяции полностью решена над  $\text{Int}$ . CIP разрешимо в с.и.л. [М 1977] и над  $S4$  [М 1979].

### ФАКТЫ:

1. Все с.и.л. с CIP, IPR и PBP полностью описаны.
2. Каждая из них узнаваема и даже сильно узнаваема над  $\text{Int}$  [М 1977, М 2000].
3. Существует точно 8 с.и.л. с CIP. Все с.и.л. имеют WIP.

## ФАКТЫ:

1. Слабое интерполяционное свойство WIP разрешимо над J [М 2011],  $wK4 = K + p \& \Box p \rightarrow \Box \Box p$  [Карпенко 2012].
2. Существует континуум слабо транзитивных модальных логик с WIP и континуум J-логик с WIP.

## IPR над S4 [М 2013]:

**Теорема 1.** Существует лишь конечное число логик над S4 с IPR.

**Теорема 2.** Все логики над S4 с IPR узнаваемы над S4.

### Следствие.

Интерполяционные свойства CIP, IPR, проективное свойство Бета PBP разрешимы над S4.

THANK YOU!

-  [М 1972] Л.Л.Максимова. *Предтабличные суперинтуиционистские логики*. Алгебра и логика, 11, 5, 1972, 558–570.
-  [М 1975] Л.Л.Максимова. *Предтабличные расширения логики  $S_4$  Льюиса*. Алгебра и логика, 14, 1, 1975, 28–55.
-  [М 1977] Л.Л.Максимова. *Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия*. Алгебра и логика, 16, 6, 1977, 643–681.
-  [М 1979] Л.Л. Максимова. *Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топовбулевых алгебр*. Алгебра и логика, 18, 1979, 556–586.
-  [М 2000] L.Maksimova. *Strongly decidable properties of modal and intuitionistic calculi*. Logic Journal of the IGPL 8, 6, 2000, 797–819.

-  [М 2011] Л.Л.Максимова. *Разрешимость слабого интерполяционного свойства над минимальной логикой*. Алгебра и логика, 50, 2, 2011, 152–188.
-  [М 2013] Л.Л.Максимова. *Ограниченная интерполяция над модальной логикой S4*. Алгебра и логика, 52, 4, 2013, 461–501.
-  [М-Ю 2015] Л.Л.Максимова, В.Ф.Юн. *Узнаваемые логики*. Алгебра и логика, 2015, 54, 2, 252–274
-  [М-Ю 2016] Л.Л.Максимова, В.Ф. Юн. *Проблема табличности над минимальной логикой*. Сибирский математический журнал, 57, 6, 2016, 1320–1332.
-  [М-Ю 2017] Л.Л.Максимова, В.Ф.Юн. *Сильная разрешимость и сильная узнаваемость*. Алгебра и логика, 56, 5, 2017, 559–581 .



[М-Ю 2017-1] Л.Л. Максимова, В.Ф.Юн. *Слои и уровни расширений минимальной логики*. Сибирский математический журнал, 58, 6, 2017, 1341–1353.



[М-Ю 2018] Л.Л.Максимова, В.Ф.Юн. *Сильная вычислимость слоев над логикой  $G1$* . Сибирские Электронные Математические Известия, 15, 2018, 35–47.